

République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique

Université de Carthage
École Supérieure des communications de Tunis



École Doctorale

Thèse de Doctorat
Sihem Châabouni
N° d'ordre :

THESE

Présentée à
L'École Supérieure des Communications de Tunis

En vue de l'obtention du

DOCTORAT

Dans la discipline *Technologie de l'information et de la communication*

Par
Sihem Châabouni ep. Kechaou

OPTIMISATION DU MAPPING ET ESTIMATION DU CANAL EN PRESENCE D'UN TURBO-DETECTEUR

Soutenu le 13 Mars 2012, devant le jury composé de :

Mme Meriem Jaidane
M. Hikmet Sari
M. Nouredine Hamdi
M. Hatem Boujemaa
Mme Noura Sellami
M. Mohamed Siala

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Encadrant
Encadrant

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude

- à Madame Meriem Jaaidane, Professeur à l'ENIT, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse,
- à Monsieur Hikmet Sari, Professeur à Supélec et Monsieur Noureddine Hamdi, Maître de conférences à l'INSAT pour leur lecture attentive de mon rapport de thèse et leurs remarques pertinentes,
- à Monsieur Hatem Boujema, Maître de conférences à Sup'Com, pour avoir bien voulu participer à mon jury de thèse et pour son intérêt pour ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement Madame Noura Sellami Turki, Maître de conférence à l'ENIS, qui a suivi de près la préparation de ce travail. Merci pour sa disponibilité et ses conseils fructueux. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à l'égard de Monsieur Mohamed Siala, Professeur à Sup'Com, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler et qui m'a donné de précieux encouragements et conseils.

Enfin, je remercie mon mari pour son encouragement continu, mes deux chers enfants Mahdi et Mohamed, mes parents pour leurs sacrifices et leurs soutiens, mes beaux parents pour leurs sourires toujours présents. Merci à Mehdi, Amine, Mouna, Radhouane, Ghazi, Mahla et Elyès. Merci à toute ma famille et mes amis pour qui j'éprouve tout le respect.

Table des matières

Table des matières	1
Liste des figures	5
Liste des tableaux	11
Abréviations	12
Notations	14
Introduction générale	16
1 Transmission sur un canal sélectif en fréquence	22
1.1 Introduction	22
1.2 Canal de transmission	23
1.2.1 Sélectivité en temps et en fréquence	23
1.2.2 Modèle de canal	23
1.3 Modulations et mappings	26
1.4 Egalisation	27
1.4.1 Types d'égaliseurs	27
1.4.2 Algorithme BCJR	29
1.5 Codage de canal	32
1.5.1 Principe du codage convolutif	32
1.5.2 Décodage des codes convolutifs	34
1.6 Entrelaceur	35
1.7 Turbo-détecteur	35
1.8 Conclusion	36

2	Optimisation du mapping pour un turbo-décteur MAP avec connaissance parfaite du canal	38
2.1	Introduction	38
2.2	Modélisation du système	39
2.3	Structure du turbo-décteur MAP	41
2.4	Modélisation des LRVs	43
2.4.1	Distribution des LRVs à la sortie d'un canal BABG pour une MDP-2	43
2.4.2	Modélisation des LRVs <i>a posteriori</i> : Cas d'un canal BABG non sélectif en fréquence pour une MDP-8	44
2.4.3	Modélisation des LRVs extrinsèques : Cas d'un turbo-démodulateur sur un canal BABG non sélectif en fréquence pour une MDP-8 . .	47
2.5	Analyse des performances de l'égaliseur MAP dans le turbo-décteur . .	48
2.5.1	Cas d'un canal fixe	50
2.5.2	Cas d'un canal de Rayleigh par blocs	57
2.5.3	Résultats des simulations	59
2.6	Optimisation du mapping	62
2.6.1	Mappings optimisés	62
2.6.2	Résultats des simulations	64
2.7	Mapping adaptatif	67
2.7.1	Principe du mapping adaptatif	67
2.7.2	Résultats des simulations	69
2.8	Conclusion	70
3	Optimisation du mapping pour un turbo-décteur MAP avec estimation de canal	76
3.1	Introduction	76
3.2	Modélisation du système	77
3.3	Structure du turbo-décteur MAP avec estimation de canal	79
3.4	Analyse des performances de l'égaliseur MAP dans le turbo-décteur pour un canal estimé	79
3.4.1	Approximation de la probabilité d'erreur	80
3.4.2	Cas des informations <i>a priori</i> fiables	82
3.4.3	Résultats des simulations	84
3.5	Optimisation du mapping	87
3.6	Mapping adaptatif	90

<i>Table des matières</i>	3
3.6.1 Principe du mapping adaptatif	90
3.6.2 Résultats des simulations	91
3.7 Conclusion	91
4 Récepteur itératif avec réestimation d'un canal sélectif en temps et en fréquence	96
4.1 Introduction	96
4.2 Modélisation du système	97
4.3 Modèle du canal	99
4.4 Représentation convenable du canal discret	99
4.5 Estimation itérative du canal suivant le critère MAP	100
4.5.1 Expression exacte de l'estimation du canal	101
4.5.2 Expression approximée de l'estimation itérative du canal	102
4.6 Récepteur itératif avec réestimation du canal en l'absence de précodage .	103
4.6.1 Principe du récepteur itératif	103
4.6.2 Résultats des simulations	104
4.7 Récepteur itératif avec expression approximée de l'estimation de canal et précodage	106
4.7.1 Principe du précodage	106
4.7.2 Résultats des simulations	109
4.8 Conclusion	110
Conclusion et perspectives	114
Annexe A Distribution des LRVs <i>a posteriori</i> : Cas d'un canal BABG non sélectif.	118
Annexe B Calcul de la probabilité d'erreur par paire pour un canal connu	121
Annexe C Calcul de la distribution de l'énergie d'un canal de Rayleigh par blocs	124
Annexe D Calcul de la probabilité d'erreur par paire pour un canal estimé	127
Annexe E Expression analytique de l'estimateur en utilisant l'algorithme EM	131

Table des matières

4

Bibliographie

136

Liste des figures

1.1	Chaîne de transmission numérique sur canal sélectif en temps et en fréquence .	24
1.2	Treillis de l'égaliseur MAP pour un canal de longueur 3 et une modulation MDP-2	29
1.3	Simplification du calcul de l'algorithme MAP	30
1.4	Codeur convolutif non systématique non récursif de polynômes générateurs (7,5)	33
1.5	Treillis du code convolutif NRNSC de polynômes générateurs (7,5) _{octal}	34
2.1	Structure de l'émetteur	40
2.2	Structure du turbo-détecteur	42
2.3	Constellation de la modulation MDP-8 avec mapping de Gray	44
2.4	Distribution des LRVs <i>a posteriori</i> à la sortie du démodulateur à travers un canal BABG non sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$	46
2.5	Comparaison des courbes de TEB à la sortie du démodulateur obtenues par simulations et celles basées sur l'expression théorique (2.1) et l'expression théorique approximée (2.3) : canal BABG, modulation MDP-8 avec un mapping de Gray.	47
2.6	Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du démodulateur à travers un canal BABG non sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$, à la 3 ^{ème} itération du turbo-démodulateur quand le bit codé est égal à 1.	48
2.7	Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur à travers un canal BABG non sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$, à la 3 ^{ème} itération du turbo-démodulateur quand le bit codé est égal à 1.	49
2.8	Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur MAP à travers un canal fixe sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle \underline{h} , à la 3 ^{ème} itération du turbo-détecteur quand le bit codé est égal à 1 : a) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5; 0.71; 0.5)$, code(7,5). b) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.817; 0.57)$, code(7,5). c) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5; 0.71; 0.5)$, code(17,15). d) $E_b/N_0 = 3dB$, $\underline{h}=(0.5; 0.71; 0.5)$, code(7,5).	55

2.9	Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur MAP à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$ quand le bit codé est égal à 1 à la : a) 1 ^{ère} itération du turbo-détecteur et b) 3 ^{ème} itération du turbo-détecteur.	56
2.10	Constellation de la modulation MDP-8 avec un mapping SP.	60
2.11	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.8) (en traits continus) : canal fixe sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle (0.5;0.71;0.5), modulation MDP-8 avec un mapping SP.	61
2.12	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.13) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$, $\sigma_2^2 = 0.4286$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.	62
2.13	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.14) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.	63
2.14	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.13) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec $\sigma_0^2 = 0.375$, $\sigma_1^2 = 0.625$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.	64
2.15	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.14) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{2}$, pour $0 \leq i \leq 1$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.	65
2.16	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus), de celles basées sur (2.13) que nous proposons (en traits continus) et celles basées sur (2.16) utilisant [18] (en pointillés) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec $\sigma_0^2 = 1/4$, $\sigma_1^2 = 1/2$, $\sigma_1^2 = 1/4$, une modulation MDP-8 avec un mapping SP.	66
2.17	TEB en fonction de E_b/N_0 à la sortie du décodeur pour une modulation MDP-8 avec un mapping SP et un canal fixe sélectif en fréquence : comparaison du TEB obtenu par simulations du turbo-démodulateur (courbes en traits continus) et du turbo-détecteur (courbes en traits discontinus).	67
2.18	Constellation du mapping a. MDP-8 optimisé et b. MAQ-16 optimisé	68
2.19	valeur moyenne de $\mu_{eq,in}$ en fonction du nombre G de blocs.	69

2.20 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.5;0.71;0.5), pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés). 70

2.21 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$ et $\sigma_2^2 = 0.4286$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés). 71

2.22 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés). 72

2.23 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$ et $\sigma_2^2 = 0.4286$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés). 72

2.24 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés). 73

2.25 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.5;0.71;0.5), pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge). 73

2.26 TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$ et $\sigma_2^2 = 0.4286$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge). 74

2.27	TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).	74
3.1	Structure du turbo-détecteur avec estimation de canal.	79
3.2	Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur MAP à travers un canal fixe estimé sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle \underline{h} , à la 3 ^{ème} itération du turbo-détecteur quand $\tilde{b}_k = 1$: a) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5;0.71;0.5)$, code(7,5). b) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.817;0.57)$, code(7,5). c) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5;0.71;0.5)$, code(17,15). d) $E_b/N_0 = 2dB$, $\underline{h}=(0.5;0.71;0.5)$, code(7,5).	85
3.3	Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur MAP à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$ et à la 3 ^{ème} itération du turbo-détecteur quand le bit codé est égal à 1.	86
3.4	Différence entre la distribution de la figure 3.3 et la distribution d'un mélange de deux gaussiennes symétriques avec les mêmes rapports et moyennes	87
3.5	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et celles basées sur l'approximation analytique (3.4) (en traits continus) : canal de réponse impulsionnelle (0.57;0.817), modulation MDP-8 avec un mapping de Gray et $T_0 = 2$	88
3.6	Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et celles basées sur l'approximation analytique (3.4) (en traits continus) : canal de réponse impulsionnelle (0.5;0.71;0.5), modulation MDP-8 avec un mapping de Gray et $T_0 = 3$	89
3.7	Exemple de mappings obtenus par l'algorithme BSA : canal (0.5;0.71;0.5), code (7,5), $\frac{E_b}{N_0} = 5dB$, $\tilde{s} = (-1, 1, 1)$ et la modulation MDP-8.	90
3.8	Mapping optimisé pour $\frac{E_b}{N_0} = 5dB$, le canal (0.5;0.71;0.5), le code (7,5) et $\tilde{s} = (-1, 1, 1)$: a. mapping MDP-8 et b. mapping MAQ-16.	91
3.9	TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).	92
3.10	TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés)	93

3.11	TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.57;0.817), pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).	93
3.12	TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé sélectif en fréquence, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).	94
4.1	Structure de l'émetteur	98
4.2	Récepteur itératif avec estimation de canal	103
4.3	Valeurs propres Γ_k^l en fonction de k pour $B_dT_s = 10^{-3}$ (courbe en traits discontinus) et $B_dT_s = 10^{-5}$ (courbe en traits continus)	104
4.4	TEB en fonction du RSB pour $B_dT_s = 10^{-5}$ et une modulation MDP-2. Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal en considérant l'expression approximée (courbes en traits continus), des performances du récepteur itératif avec estimation de canal en utilisant l'expression exacte (courbes en pointillés) et des performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en traits discontinus)	105
4.5	TEB en fonction du RSB pour $B_dT_s = 10^{-3}$ et une modulation MDP-4. Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits continus) et des performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en pointillés).	106
4.6	TEB en fonction du RSB pour $B_dT_s = 10^{-5}$ et une modulation MDP-4. Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits continus) et des performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en pointillés).	107
4.7	TEB en fonction du RSB : Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits discontinus) et avec précodage et estimation de canal (courbes en traits continus) et avec une connaissance parfaite de canal (courbes en pointillés) pour un canal sélectif en fréquence (non sélectif en temps)	111

4.8 TEB en fonction du RSB : Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits discontinus), avec précodage et estimation de canal (courbes en traits continus), avec l'estimation exacte de canal (courbes en pointillés) et avec une connaissance parfaite de canal (courbes en pointillés rouge) pour un canal sélectif en temps et en fréquence ($B_d T_s = 10^{-5}$) 112

4.9 TEB en fonction du RSB : Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits discontinus) et avec précodage et estimation de canal (courbes en traits continus) et avec une connaissance parfaite de canal (courbes en pointillés) pour un canal sélectif en temps et en fréquence ($B_d T_s = 10^{-3}$) 112

A.1 a. Symboles de l'ensemble E1 b. Symboles de l'ensemble E2 119

Liste des tableaux

2.1	Probabilités d'occurrence des erreurs binaires pour un canal connu et différentes conditions de simulations	52
3.1	Probabilités d'occurrence des erreurs binaires pour un canal estimé et différentes conditions de simulations	82
3.2	Valeurs de $\mu_{eq,in}$ à la convergence au cours de l'algorithme BSA relatif à la figure 3.7	88

Abréviations

Dans ce travail plusieurs abréviations sont utilisées. Nous les rappelons par ordre alphabétique et donnons leurs significations :

APP	<i>A Posteriori</i> Probability
BABG	Bruit Additif Blanc Gaussien
BCJR	Bahl Cocke Jelinek Raviv
BICM	Bit Interleaved Coded Modulation
BPSK	Binary Phase Shift Keying
BSA	Binary Switching Algorithm
ddp	densité de probabilité
DFE	Decision Feedback Equalizer
EM	Expectation-Maximization
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale
IES	Interférence Entre Symboles
IID	Indépendants et Identiquement Distribués
KL	Karhunen-Loève
LRV	Logarithme de Rapport de Vraisemblance

MAP	Maximum <i>A Posteriori</i>
MAQ	Modulation d'Amplitude en Quadrature
MDP-M	Modulation à Déplacement de Phase à M états
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MMSE	Minimum Mean Square Error
MV	Maximum de Vraisemblance
NRNSC	Non Recursive Non Systematic Codes
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
PAPR	Peack to Average Power Ratio
PEB	Probabilité d'Erreur Binaire
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
RSB	Rapport Signal à Bruit
RSC	Recursive Systematic Codes
SISO	Soft-Input Soft-Output
SP	Set Partitioning
SPD	Spectre de Puissance Doppler
TEB	Taux d'Erreur Binaire
TES	Taux d'Erreur Séquence
ZF	Zero Forcing

Notations

$P(\cdot)$	Probabilité
$(\cdot)^T$	Transposition
$(\cdot)^\dagger$	Trans-conjugaison
$\ \cdot\ $	Norme
$\exp(\cdot)$	Exponentielle
\log	Logarithme
$\frac{\partial}{\partial \alpha}$	Dérivée par rapport à α
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$ \cdot $	Module

Introduction générale

Afin d'assurer une communication fiable répondant aux contraintes des systèmes actuels de télécommunications, en termes de largeur de la bande, de puissance à l'émission et de débit, il faut concevoir des techniques de modulation/démodulation et de codage/décodage efficaces. Dans ce cadre, un schéma intéressant à utiliser à l'émission est le schéma BICM (Bit Interleaved Coded Modulation) [29, 30, 49]. Il consiste à concaténer un codeur binaire et un modulateur séparés par un entrelaceur bit [49]. Il permet d'obtenir de bonnes performances aussi bien sur le canal de Rayleigh que sur le canal gaussien. D'autre part, les canaux radiomobiles sont sélectifs en fréquence, ce qui engendre des interférences entre symboles. Pour lutter contre ces interférences, un égaliseur doit être utilisé. La solution optimale au problème d'égalisation et de décodage pour un schéma BICM (égalisation et décodage conjoints) est très complexe à mettre en oeuvre à cause de la présence de l'entrelaceur. Une solution sous-optimale permettant de réaliser un bon compromis complexité/performance consiste à utiliser un récepteur itératif [13, 19, 36] selon le principe des turbo-codes [4, 38]. L'idée de base du traitement itératif est d'échanger des informations extrinsèques entre les différents étages du récepteur pour améliorer successivement les performances du récepteur au fil des itérations. Le choix du mapping est important pour augmenter le gain en performances au cours des itérations. Le problème de l'optimisation du mapping en présence d'un récepteur itératif a été traité dans plusieurs travaux. Par exemple, dans [41] le mapping optimal est choisi de manière à minimiser des bornes analytiques sur la probabilité d'erreur à la sortie du démodulateur dans le cas d'une transmission codée sur un canal à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) quand un turbo-démodulateur est utilisé. Etant donné qu'une recherche exhaustive du mapping devient très compliqué quand l'ordre de la modulation augmente, il a été proposé dans [41] d'approcher la solution en utilisant l'algorithme Binary Switching Algorithm (BSA). Dans [9], l'étude a été effectuée dans le cas d'une transmission codée sur un canal sélectif en fréquence, où un turbo-détecteur linéaire utilisant un égaliseur Minimum Mean Square Error (MMSE) est considéré. Dans la première partie de cette thèse, nous

proposons d'étudier le problème quand un détecteur selon le critère du Maximum *A Posteriori* (MAP) est utilisé dans le turbo-détecteur. Pour ce faire, nous calculons une approximation analytique de la probabilité d'erreur à la sortie du détecteur MAP à fort RSB. Nous proposons de trouver le mapping qui minimise cette expression.

Le canal est en général estimé en utilisant des séquences d'apprentissage (connues au niveau du récepteur) [7, 8]. Puisque nous ne pouvons pas nous permettre dans les systèmes de communications d'utiliser de longues séquences d'apprentissage, cette estimation est en général assez mauvaise. Ceci entraîne une dégradation des performances du récepteur. Ce problème est d'autant plus important lorsque le canal est sélectif en temps et en fréquence. Nous proposons donc dans la deuxième partie de la thèse de nous intéresser à l'estimation de ce type de canal. Nous proposons pour faciliter l'étude de représenter le canal en utilisant le théorème d'expansion orthogonale de Karhunen-Loève (KL) [37]. L'estimation du canal est ensuite effectuée itérativement suivant le critère MAP en utilisant l'algorithme Expectation-Maximization (EM). Puisque l'algorithme obtenu est complexe, nous proposons une version approximée qui réalise un bon compromis complexité/performance.

Cette thèse est constituée de quatre chapitres organisés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à la transmission sur un canal sélectif en fréquence. Nous donnons les caractéristiques du canal de transmission. Puis, nous présentons les blocs de l'émetteur et du récepteur en détaillant la modulation, l'égalisation, le codage et l'entrelacement. Enfin, nous donnons le principe du récepteur itératif.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un schéma BICM à travers un canal sélectif en fréquence parfaitement connu au niveau du récepteur, constant durant un bloc de données et pouvant varier d'un bloc à un autre. Au niveau du récepteur, nous considérons un récepteur itératif formé par un égaliseur MAP et un décodeur MAP. Nous proposons d'effectuer une étude analytique des performances de l'égaliseur MAP dans le turbo-détecteur. Notons que cette étude a été faite dans [28, 39] dans le cas d'un turbo-égaliseur linéaire. Dans [44, 46], les auteurs ont étudié analytiquement l'impact des informations *a priori* fournies par le décodeur sur les performances de l'égaliseur MAP. L'étude a été faite en considérant une Modulation à Déplacement de Phase d'ordre 2 (MDP-2) et un canal fixe sélectif en fréquence. Nous proposons de généraliser cette étude au cas des modulations d'ordres élevés pour deux cas de canaux sélectifs en fréquence : les canaux fixes et les canaux de Rayleigh par blocs. Nous considérons deux types de modulations : les modulations MDP et les modulations d'amplitude en quadrature (MAQ).

Nous étudions les distributions des Logarithmes de Rapport de Vraisemblance (LRVs) à la sortie de l'égaliseur et du décodeur et montrons qu'elles peuvent être approximées par des distributions gaussiennes. Nous donnons ensuite une approximation analytique de la PEB à fort RSB à la sortie de l'égaliseur MAP lorsqu'il est alimenté par des LRVs *a priori* du décodeur modélisés par des variables gaussiennes. Nous proposons de trouver le mapping qui minimise cette approximation quand les informations *a priori* sont fiables (à fort RSB). Le mapping obtenu correspond à éloigner le plus possible les symboles qui diffèrent par un seul bit contrairement au mapping de Gray. Quand l'ordre de la modulation est élevé, nous proposons d'utiliser l'algorithme BSA pour trouver un tel mapping. Enfin, puisque le choix du mapping est fait à fort RSB, et que le mapping trouvé n'est pas optimal à faible RSB, nous proposons d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission.

Dans le troisième chapitre, nous étendons l'étude faite dans le chapitre 2 au cas où le canal est estimé, sélectif en fréquence et constant durant la transmission. Dans [46], une étude analytique de l'impact des informations *a priori* fournies par le décodeur et de l'estimation du canal sur les performances de l'égaliseur MAP a été menée dans le cas d'une MDP-2. Nous proposons de généraliser cette étude au cas des modulations d'ordres élevés. Nous proposons alors de calculer une approximation analytique de la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur MAP alimenté par des LRVs *a priori* gaussiens à fort RSB dans le cas d'un canal fixe estimé. Nous utilisons ensuite l'algorithme BSA [53] pour trouver le mapping qui minimise cette approximation. Le mapping obtenu est différent de celui trouvé dans le cas du canal connu. Nous étudions aussi le mapping adaptatif dans un contexte de canal estimé.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à l'estimation des canaux sélectifs en temps et en fréquence. A chaque itération du récepteur itératif, le décodeur calcule de nouvelles informations sur les bits émis (probabilités *a posteriori* sur les bits codés) qui deviennent de plus en plus fiables. L'idée est donc d'utiliser ces informations pour améliorer l'estimation de canal au fil des itérations. Notre approche consiste à estimer itérativement selon le critère MAP le canal sélectif en temps et en fréquence en utilisant l'algorithme EM [10]. Cet algorithme utilise la séquence d'apprentissage et les probabilités *a posteriori* (APPs) sur les bits codés provenant du décodeur pour améliorer à chaque itération l'estimation de canal. Il nécessite aussi une représentation convenable du canal discret sur chaque bloc. Nous proposons d'utiliser le théorème d'expansion orthogonale de KL [37] pour chaque trajet. Nous intégrons cet algorithme d'estimation de canal dans le récepteur itératif utilisant un égaliseur MAP et un décodeur MAP.

L'algorithme obtenu est un algorithme complexe à réaliser puisque chaque itération est faite en L étapes (avec $L - 1$ la mémoire du canal). Afin de simplifier cet algorithme, nous négligeons le terme d'interférence entre symbole. Nous obtenons ainsi un algorithme avec une seule étape par itération. Puis, pour réduire l'erreur causée par cette simplification, nous proposons d'utiliser le principe du "selected mapping" utilisé d'habitude pour réduire la puissance moyenne crête élevée (PAPR : Peak to Average Power Ratio) des systèmes OFDM [32]. Ainsi, un précodeur candidat (connu par le récepteur) est choisi au niveau de l'émetteur parmi un ensemble de précodeurs de façon à minimiser la valeur quadratique moyenne du terme d'interférence négligé.

Enfin, dans la conclusion et les perspectives, nous récapitulons nos principaux résultats obtenus dans cette thèse et proposons quelques perspectives à notre étude.

Publications de l'auteur

- Articles de Revues

1. S.Châabouni, M.Siala and N.Sellami "Selective mapping for reduced complexity turbo channel estimation operating on highly time and frequency selective channels," *European Transaction on Telecommunications (ETT'10)*, vol. 21, no. 6, pp. 519-525, Oct. 2010.
2. S.Châabouni, N.Sellami and M.Siala "Mapping optimization for a MAP turbo-detector over a frequency selective channel," article en cours de préparation pour une publication dans un journal.

- Conférences internationales à comité de lecture

3. S.Châabouni, N.Sellami and A.Roumy "The impact of a priori information on the MAP equalizer performance with MPSK modulation," *EUSIPCO'07*, Polony, Sept. 2007.
4. S.Châabouni, N.Sellami and M.Siala "Turbo channel estimation for TDMA systems on highly time and frequency selective channels," *ISWPC'08*, Greece, May 2008.
5. S.Châabouni, N.Sellami and M.Siala "Performance analysis of the MAP turbo-equalizer and mapping optimization for BICM," *ICECS'10*, Greece, Dec. 2010.
6. S.Châabouni, N.Sellami and M.Siala "Mapping optimization for the MAP turbo-detector with channel estimation," soumis au *SPAWC'12*, Turkey, June 2012.

Chapitre 1

Transmission sur un canal sélectif en fréquence

1.1 Introduction

Un des problèmes majeurs dans les systèmes de communications à hauts débits est l'interférence entre symboles (IES) due à la sélectivité en fréquence des canaux radiomobiles. Pour lutter contre l'IES, un égaliseur peut être utilisé. Afin d'améliorer davantage la qualité de la transmission, un codage canal est en général utilisé en plus de l'égaliseur. Dans le cas des transmissions codées, les récepteurs les plus utilisés sont des récepteurs qui opèrent de manière disjointe c'est à dire qui réalisent l'égalisation et le décodage de manière indépendante. Depuis l'invention des turbo-codes [4], cette idée a changé. Ainsi, nous appliquons dans cette thèse le concept turbo itératif à l'égalisation et au décodage dans le cas des canaux sélectifs en fréquence. Le principe de ce traitement itératif est d'échanger des informations extrinsèques entre l'égaliseur et le décodeur afin d'améliorer les performances du récepteur au fil des itérations.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par rappeler les caractéristiques du canal de transmission. Ensuite, nous précisons le rôle de la modulation et l'importance du choix du mapping dans la chaîne de transmission. Puis, nous présenterons brièvement les différents types d'égaliseurs et plus particulièrement l'égaliseur choisi dans notre travail qui est l'égaliseur utilisant le critère du Maximum *A Posteriori* (MAP) symbole. Nous détaillerons par la suite l'algorithme BCJR (Bahl Cocke Jelinek Raviv) [1, 26, 52] qui permet de mettre en œuvre cet égaliseur. Nous présenterons après les codes convolutifs et le principe du décodage de ces codes. Puis, nous donnerons le rôle de l'entrelaceur dans

la chaîne de transmission et présenterons brièvement le principe du récepteur itératif.

1.2 Canal de transmission

1.2.1 Sélectivité en temps et en fréquence

L'un des problèmes fondamentaux dans les transmissions radiomobiles est le phénomène de propagation par trajets multiples. Dans ce cadre, le signal reçu est composé de plusieurs répliques du signal émis dues aux réflexions et/ou aux diffractions du signal émis sur les obstacles (canal multitrajets). Ces répliques sont caractérisées par des temps d'arrivée, des amplitudes et des déphasages différents. On appelle étalement temporel l'écart temporel entre l'instant d'arrivée du premier trajet et celui du dernier. Un canal est dit sélectif en fréquence si son étalement temporel T_m (appelé aussi multipath spread pour un canal discret) vérifie l'inégalité $T_m > T_s$, où T_s est la durée symbole. De point de vue fréquentiel, nous définissons la bande de cohérence d'un canal comme étant l'intervalle de fréquences au cours duquel les fluctuations fréquentielles du canal sont fortement corrélées. Elle est à peu près égale à l'inverse de l'étalement temporel. Un canal est sélectif en fréquence si sa bande de cohérence $(\Delta f)_c < \frac{1}{T_s}$. Dans le cas où $(\Delta f)_c \gg \frac{1}{T_s}$, les composants fréquentielles du signal subissent des atténuations semblables et le canal est dit non sélectif en fréquence (flat fading).

En raison du déplacement de l'émetteur, du récepteur ou des obstacles, le canal de transmission subit des variations temporelles. Nous définissons le temps de cohérence comme étant l'intervalle de temps au cours duquel les fluctuations en temps du canal sont fortement corrélées. Ce temps est défini par $(\Delta t)_c \simeq \frac{1}{B_d}$ où B_d est la dispersion Doppler du canal qui représente la plage de fréquence pour laquelle le spectre Doppler est non nul. Un canal est sélectif en temps si le temps de cohérence $(\Delta t)_c$ est plus petit que la durée symbole T_s . Il est dit à évanouissements rapides (fast fading). Si $(\Delta t)_c > T_s$ le canal est non sélectif en temps et il est à évanouissements lents (slow fading).

Dans ce qui suit, nous donnons le modèle équivalent à temps discret du canal.

1.2.2 Modèle de canal

Nous considérons une séquence de taille N formée par des symboles s_i d'un alphabet de taille finie donnée par :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i \delta(t - iT_s), \quad (1.1)$$

où $s(t)$ est le signal en bande de base, $\delta(t)$ la fonction Dirac et T_s est la durée symbole.

Nous supposons que le signal $s(t)$ est émis à travers la chaîne de transmission donnée par la figure 1.1. Le signal $s(t)$ est filtré par un filtre d'émission de réponse impulsionnelle $h_e(t)$ pour donner le signal :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i h_e(t - iT_s).$$

Le canal de transmission est un canal multitrajets. Chaque trajet p est caractérisé par une amplitude $a_p(t)$ et un retard $\tau_p(t)$ variables au cours du temps. Notons par $h_c(t, \tau)$ la réponse impulsionnelle du canal à l'instant t (τ représente le retard de propagation) :

$$h_c(t, \tau) = \sum_{p=0}^{P-1} a_p(t) \delta(\tau - \tau_p(t)), \quad (1.2)$$

où P le nombre de trajets multiples entre l'émetteur et le récepteur. Le signal $y(t)$ est alors convolué avec la réponse impulsionnelle du canal $h_c(t, \tau)$ puis additionné à un Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) $b(t)$. A la réception, le signal est filtré par le filtre de réception de réponse impulsionnelle $h_r(t)$ qui est adapté au filtre d'émission.

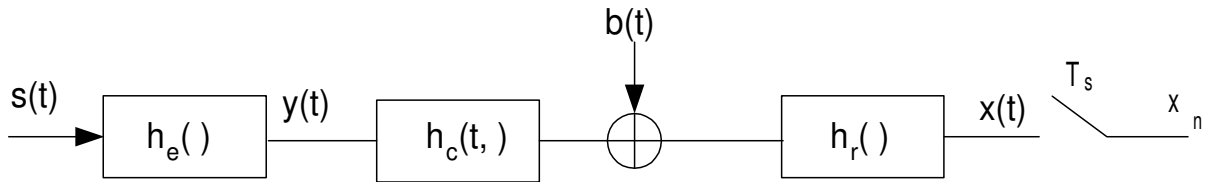


Fig. 1.1 : Chaîne de transmission numérique sur canal sélectif en temps et en fréquence

La relation qui relie le signal utile au signal reçu dans le domaine temporel est alors :

$$x(t) = h * s(t) + n(t), \quad (1.3)$$

où $h(t) = h_e * h_c * h_r(t)$, $n(t) = b * h_r(t)$ le bruit en bande de base filtré par le filtre de

réception.

En remplaçant dans l'équation (1.3) le signal émis et le filtre du canal par leurs expressions respectives (équation (1.1) et équation (1.2)), nous trouvons :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{P-1} a_p(t) f(t - iT_s - \tau_p(t)) s_i + n(t),$$

où $f(t) = h_e * h_r(t)$.

Après échantillonnage au rythme symbole T_s , nous obtenons $x_k \triangleq x(t_0 + kT_s)$:

$$x_k = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{P-1} a_p(t_0 + kT_s) f(t_0 + (k-i)T_s - \tau_p(t_0 + kT_s)) s_i + n_k. \quad (1.4)$$

Notons

$$h_{q,m} = \sum_{p=0}^{P-1} a_p(t_0 + qT_s) f(t_0 + mT_s - \tau_p(t_0 + qT_s)),$$

ce qui mène à une ré-écriture du signal reçu de l'équation (1.4) comme suit :

$$x_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_{k,k-i} s_i + n_k. \quad (1.5)$$

Les échantillons du bruit sont supposés indépendants. Selon cette écriture, un échantillon reçu à l'instant k contient la contribution du symbole utile $h_{k,0}s_k$ et aussi la contribution d'autres symboles qui représente l'IES. Il est donc utile d'utiliser un égaliseur qui a pour but de lutter contre l'IES et retrouver les symboles émis.

Nous allons supposer dans la suite que $h_{q,m} \neq 0$ si et seulement si $0 \leq m \leq L-1$, où $L-1$ la mémoire du canal. L'équation (1.5) peut être alors donnée par :

$$x_k = \sum_{i=0}^{L-1} h_{k,i} s_{k-i} + n_k.$$

Dans le cas particulier où le canal est invariant dans le temps, $h_{k,i}$ est considéré indépendant de k . La sortie du canal s'écrit alors :

$$x_k = \sum_{i=0}^{L-1} h_i s_{k-i} + n_k.$$

Dans la suite de cette thèse, nous considérons deux types de canaux : les canaux sélectifs en fréquence (chapitres 2 et 3) et les canaux sélectifs en temps et en fréquence (chapitre 4).

Lorsqu'on transmet les signaux dans leurs bandes de fréquences originales, on dit qu'on réalise une transmission en bande de base. Cette transmission est en général impossible. En effet, en général les caractéristiques du canal ne permettent pas une transmission à basse fréquence. Dans ce cas, une modulation est nécessaire pour translater la bande de fréquence du canal autour d'une fréquence porteuse adaptée au canal. Dans ce qui suit, nous présentons brièvement le critère de choix de la modulation et mettons en évidence l'importance du choix du mapping.

1.3 Modulations et mappings

Plusieurs critères entrent dans le choix d'une modulation. Nous visons en général à réduire l'occupation spectrale, la puissance d'émission et la probabilité d'erreur. Le coût du système de modulation/démodulation est aussi un critère de choix de la modulation.

Quand la bande passante disponible est réduite, il est possible d'utiliser une modulation complexe qui fait varier plusieurs paramètres à la fois (exemple : amplitude et phase). On code ainsi plus d'un bit à la fois à l'aide d'un seul symbole. Le problème de cette modulation est la représentation temporelle des signaux qui devient complexe. La solution consiste à utiliser une constellation qui est une représentation en coordonnées polaires des différents états de la modulation qui fait correspondre à chacun de ces états un symbole particulier. Le choix de la modulation (répartition des points sur la constellation) dépend de certains critères tels que la distance minimale entre les points représentatifs. Plus cette distance est grande et plus la probabilité d'erreur sera faible.

La manière dont les bits sont associés aux valeurs possibles des symboles est appelée mapping. Le mapping le plus utilisé est le mapping de Gray. Le principe de ce mapping est que deux symboles voisins ne diffèrent que par un seul bit. Ainsi, une confusion de deux symboles voisins n'introduit qu'une erreur sur un seul bit. Dans le cas d'un récepteur non itératif classique, l'utilisation de ce type de mapping réalise les meilleures performances en terme de taux d'erreur binaire. Ceci n'est pas le cas lorsqu'un récepteur itératif est

utilisé [6]. Dans les chapitres 2 et 3, nous proposons d'optimiser le mapping quand un turbo détecteur basé sur le critère MAP est utilisé.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la sélectivité en fréquence du canal engendre des IES. Ces IES ne peuvent pas être compensées par un décodeur seul d'où la nécessité de l'égalisation. L'égalisation est l'opération qui cherche à retrouver les symboles émis à partir des échantillons reçus. Nous présentons dans la suite les différentes familles d'égaliseurs en mettant l'accent sur l'égaliseur MAP qui sera utilisé dans cette thèse.

1.4 Egalisation

1.4.1 Types d'égaliseurs

Il existe deux grandes familles d'égaliseurs : la première famille concerne les égaliseurs qui s'imposent une structure souvent à base de filtres (les filtres sont choisis suivant un critère bien déterminé). La deuxième famille est celle des égaliseurs qui optimisent un critère sans aucune contrainte relative à la structure.

Les égaliseurs à structures imposées

Nous distinguons :

- **Les égaliseurs à structures linéaires**

Un égaliseur est dit linéaire si les échantillons reçus sont filtrés par un filtre linéaire. Ces égaliseurs utilisent un critère sur le filtre d'égalisation, qui peut être :

- le critère de forçage à zéro (ZF : Zero Forcing) : Le principe est de choisir le filtre égaliseur de manière à annuler complètement les interférences à la sortie. Cependant, ceci peut amplifier le bruit de la transmission.

- le critère d'Erreur Quadratique Moyenne Minimale (EQMM) appelé aussi Minimum Mean Square Error (MMSE) : il consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la sortie de l'égaliseur et les symboles émis. Ce critère réalise un bon compromis entre l'élimination de l'interférence et la non amplification du bruit.

- **Les égaliseurs à retour de décision (DFE : Decision Feedback Equalizer)**

L'égaliseur DFE est formé par un filtre aller (forward filter) et un filtre retour (feedback filter). L'entrée du filtre retour est formée par la sortie de l'égaliseur. Cet égaliseur

a la particularité d'utiliser des données décidées passées pour diminuer ou annuler l'interférence entre symboles introduite par le canal de transmission sur le symbole suivant. La complexité de cet égaliseur croît linéairement avec le nombre des coefficients du canal. Cependant, l'égaliseur DFE est sous-optimal et souffre de la propagation d'erreur à faible rapport signal à bruit.

Les égaliseurs à structures non imposées

Si aucune contrainte structurelle n'est imposée à l'égaliseur, nous parlons alors d'égaliseur à structure non-imposée. Pour ce type d'égaliseur, il est possible de résoudre le problème de l'égalisation au sens du maximum *a posteriori*. Nous distinguons alors dans ce cas deux critères MAP : un critère défini par séquence et un critère défini par symbole. Si nous n'avons aucune information *a priori* sur les données transmises, la détection MAP devient une détection suivant le critère Maximum de Vraisemblance (MV). Des algorithmes efficaces existent pour implanter le critère MAP séquence, par exemple l'algorithme de Viterbi [15, 16] qui permet d'optimiser le Taux d'Erreur Séquence (TES). Pour le critère MAP symbole, nous pouvons utiliser par exemple l'algorithme BCJR qui permet d'optimiser le Taux d'Erreur Binaire (TEB) [1, 26, 52]. Ces algorithmes sont intéressants puisque leur complexité augmente linéairement et non exponentiellement avec la longueur de la séquence.

Ces deux familles d'égaliseurs sont différentes dans leurs structures et aussi dans leurs performances. La première famille d'égaliseurs à structures imposées impose une structure à base de filtres pour éviter la complexité calculatoire. Cependant, ceci engendre des problèmes d'amplification de bruit et peut aussi engendrer le problème de propagation d'erreur [25]. La deuxième famille sans contraintes structurelles résout le problème de l'égalisation de manière optimale au sens du MAP et fournit de ce fait de bonnes performances mais au prix d'une grande complexité calculatoire.

Nous choisissons d'utiliser dans la suite les égaliseurs sans contraintes structurelles qui se basent sur le critère MAP vues les performances réalisées par ce type d'égaliseurs [40]. Nous allons présenter dans la suite l'algorithme BCJR utilisé pour implanter l'égaliseur MAP symbole.

1.4.2 Algorithme BCJR

Nous considérons un canal sélectif en fréquence de mémoire $L - 1$ avec un BABG. La séquence d'entrée de taille N est formée par des symboles s_k de l'alphabet Ω , avec $0 \leq k \leq N - 1$. Soit \hat{s}_k l'estimée de s_k . Notre but est de maximiser la probabilité *a posteriori* du symbole s_k sachant la séquence d'observations \underline{x} :

$$\hat{s}_k = \arg \max_{s_k \in \Omega} P(s_k | \underline{x}), \quad (1.6)$$

où $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_{N-1})$.

Pour faciliter la compréhension de l'algorithme BCJR, nous considérons une représentation en treillis du canal [1, 26, 52]. Le treillis a $M = p^{L-1}$ états où p est le nombre d'états de la modulation. Il y a p branches qui partent de chaque état. Nous considérons le treillis sur la figure 1.2 représentant un canal de longueur $L = 3$ utilisant une modulation BPSK (Binary Phase Shift Keying) (appelée aussi MDP-2 : Modulation à Déplacement de Phase d'ordre 2). Ce treillis présente $M = 4$ états représentés par les couples de symboles suivants $\{(-1, -1), (1, -1), (-1, 1), (1, 1)\}$. De plus, les branches correspondant à un symbole d'entrée au canal $s_k = -1$ sont représentées en pointillés et les branches correspondant à un symbole d'entrée $s_k = 1$ sont représentées en traits continus.

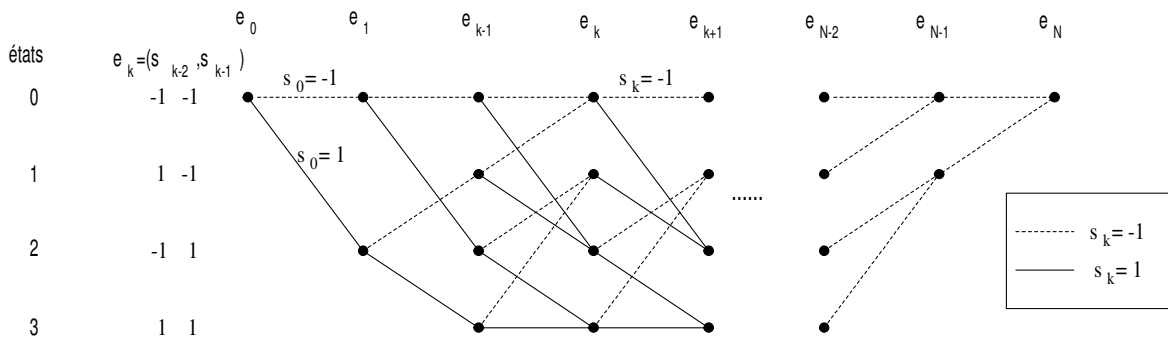


Fig. 1.2 : Treillis de l'égaliseur MAP pour un canal de longueur 3 et une modulation MDP-2

Chaque branche a un état de départ e_k et un état d'arrivée e_{k+1} correspondant au symbole émis s_k . Quelque soit l'état $e_k = (s_{k-L+1}, \dots, s_{k-1})$, le symbole s_k peut prendre toutes les valeurs possibles de l'alphabet Ω et le nombre de branches sortant de chaque état est $p = \text{card}(\Omega)$.

A l'instant k , on passe de l'état e_k à l'état e_{k+1} , les probabilités de transition sont données par $P(e_{k+1} = m' | e_k = m)$ et les probabilités de sortie sont données par $P(x_k | e_k = m, e_{k+1} = m')$. Le treillis débute et se termine à l'état 0, la sortie correspondante est $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$. L'algorithme MAP traite la séquence reçue \underline{x} pour estimer les probabilités *a posteriori* des transitions (équation (1.6)).

Puisque $P(s_k = a, \underline{x}) = P(\underline{x}) P(s_k = a | \underline{x})$, l'égalité de l'équation (1.6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\hat{s}_k = \arg \max_{a \in \{-1, 1\}} P(s_k = a, \underline{x}).$$

A l'instant k , il correspond à 'a' une des branches partant d'un état e_k du treillis (figure 1.3). Cela se traduit par :

$$P(s_k = a, \underline{x}) = \sum_{m=0}^{M-1} P(s_k = a, e_k = m, \underline{x}). \tag{1.7}$$

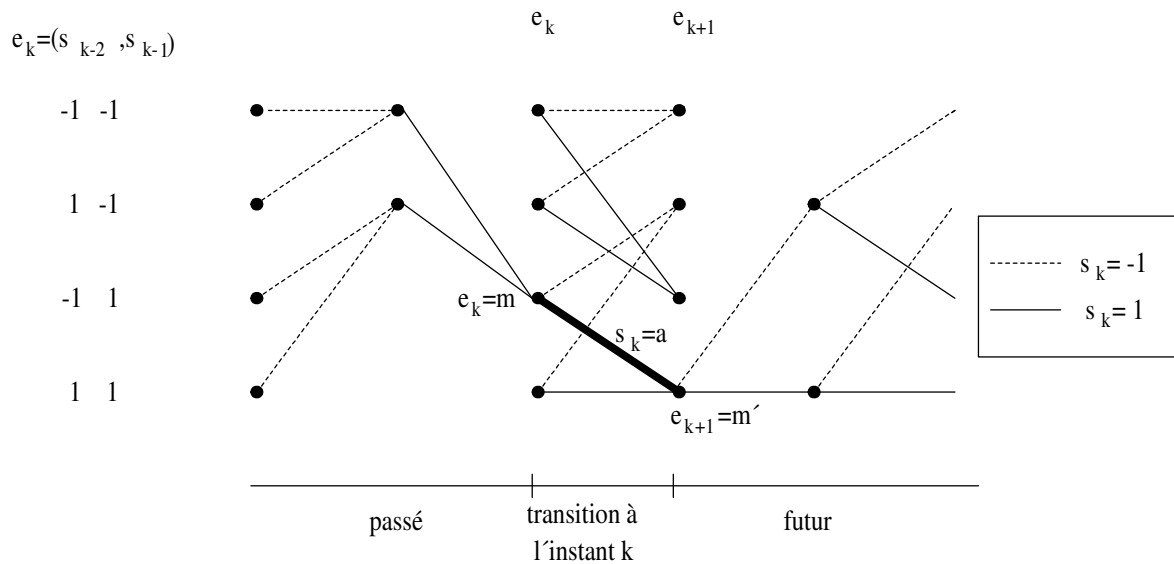


Fig. 1.3 : Simplification du calcul de l'algorithme MAP

D'après [21], si l'état $e_{k+1} = m'$ correspond à $s_k = a$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
P(s_k = a, e_k = m, \underline{x}) &= P(e_k = m, e_{k+1} = m', \underline{x}) \\
&= P(e_k = m, \underline{x}_0^{k-1}) P(e_{k+1} = m', x_k | e_k = m) P(\underline{x}_{k+1}^{N-1} | e_{k+1} = m') \\
&= \alpha_k(m) \gamma_{k+1}(m, m') \beta_{k+1}(m'), \tag{1.8}
\end{aligned}$$

où $\alpha_k(m)$ est la probabilité aller (forward probability), qui est la probabilité d'être à l'instant k dans l'état $e_k = m$ et d'avoir une séquence d'observation $\underline{x}_0^{k-1} = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, $\gamma_{k+1}(m, m')$ représente la probabilité de transition de branche de l'état m à l'état m' à l'instant k et $\beta_k(m)$ est la probabilité retour (backward), qui est la probabilité d'avoir une séquence d'observations futures $\underline{x}_k^{N-1} = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{N-1})$ sachant que $e_k = m$. La probabilité aller se calcule de manière récursive, dans le sens du temps croissant (ce qui justifie le terme forward) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1}(m') &= \sum_{m=0}^{M-1} P(e_k = m, e_{k+1} = m', \underline{x}_0^k) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} P(e_k = m, \underline{x}_0^{k-1}) P(e_{k+1} = m', x_k | e_k = m) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_k(m) \gamma_{k+1}(m, m'). \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Nous supposons que le treillis commence par l'état 0, d'où les conditions initiales : $\alpha_0(0) = 1$ et $\alpha_0(m) = 0$ pour $m \neq 0$.

La probabilité de transition peut être calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1}(m, m') &= P(e_{k+1} = m', x_k | e_k = m) \\
&= P(e_{k+1} = m' | e_k = m) P(x_k | e_k = m, e_{k+1} = m') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|x_k - c_k|^2}{2\sigma^2}\right) P(e_{k+1} = m' | e_k = m), \tag{1.10}
\end{aligned}$$

où σ l'écart type du bruit du canal et c_k est la sortie du canal non bruité. Cette formule définit $\gamma_{k+1}(m, m')$ si la transition entre les états m et m' existe, sinon $\gamma_{k+1}(m, m') = 0$. Le terme $P(e_{k+1} = m' | e_k = m)$ définit la probabilité *a priori* de transition de l'état m à l'état m' , à l'instant k .

La probabilité de retour se calcule de manière récursive, dans le sens du temps décroissant (ce qui justifie le terme backward) comme indiqué dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\beta_k(m) &= \sum_{m'=0}^{M-1} P(e_{k+1} = m', \underline{x}_k^{N-1} | e_k = m) \\
&= \sum_{m'=0}^{M-1} P(e_{k+1} = m', x_k | e_k = m) P(\underline{x}_{k+1}^{N-1} | e_{k+1} = m') \\
&= \sum_{m'=0}^{M-1} \gamma_{k+1}(m, m') \beta_{k+1}(m'). \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Nous supposons que le treillis se termine par l'état 0, d'où les conditions initiales : $\beta_{N-1}(0) = 1$ et $\beta_{N-1}(m) = 0$ pour $m \neq 0$.

Déroulement de l'algorithme

L'algorithme calcule les probabilités de transitions $\gamma_{k+1}(m, m')$ en utilisant (1.10). Puis, il calcule de manière récursive les probabilités passées $\alpha_k(m)$ en utilisant l'équation (1.9) et en parcourant le treillis dans le sens du temps croissant, ensuite les probabilités futures $\beta_{k+1}(m)$ en utilisant l'équation (1.11) et en parcourant le treillis dans le sens du temps décroissant. Ces deux probabilités doivent être normalisées à chaque instant. Un dernier passage dans le sens croissant du temps permet de calculer à l'aide du produit des trois termes calculés auparavant, les probabilités conjointes $P(e_k = m, e_{k+1} = m', \underline{x})$ (1.8) et enfin par sommation sur tous les états, nous obtenons les probabilités *a posteriori* qui sont données par l'équation (1.7).

En plus de l'égaliseur, le codeur est un élément essentiel dans la chaîne de transmission. Le codage de canal a pour rôle de détecter et corriger les erreurs de la transmission par l'ajout de redondance à la séquence binaire [48].

Les codes que nous allons utiliser dans cette thèse sont les codes convolutifs. Nous présentons ces codes dans le paragraphe suivant.

1.5 Codage de canal

1.5.1 Principe du codage convolutif

Les codes convolutifs font partie des codes correcteurs d'erreur. Chaque bloc de n éléments binaires en sortie du codeur dépend non seulement du bloc de k éléments binaires

en entrée mais aussi des m blocs précédents. Ainsi, ces codes introduisent un effet de mémoire d'ordre m . La quantité $m + 1$ s'appelle longueur de contrainte du code. Le rapport $R_c = \frac{k}{n}$ est appelé rendement du code. Nous distinguons deux classes de codes convolutifs qui sont les codes convolutifs non systématiques non récurrents (NRNSC : Non Recursive Non Systematic Codes) et les codes convolutifs récurrents systématiques (RSC : Recursive Systematic Codes). Dans ce travail, nous utilisons les codes NRNSC que nous présentons dans ce qui suit.

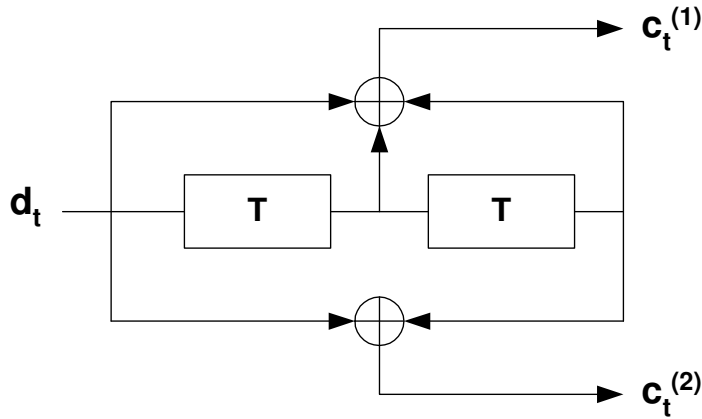


Fig. 1.4 : Codeur convolutif non systématique non récurrent de polynômes générateurs (7, 5)

La figure 1.4 montre un exemple de code NRNSC de rendement $R_c = \frac{1}{2}$ et de longueur de contrainte $m + 1 = 3$. Son entrée est constituée par des blocs de $k = 1$ élément binaire d_t (t étant l'instant) et sa sortie par des blocs de $n = 2$ éléments binaires $\begin{pmatrix} c_t^{(1)} \\ c_t^{(2)} \end{pmatrix}$. Les bits à la sortie du codeur peuvent s'écrire en fonction du bloc d'entrée :

$$c_t^{(1)} = \sum_{j=0}^m g_{1,j} d_{t-j}$$

$$c_t^{(2)} = \sum_{j=0}^m g_{2,j} d_{t-j}$$

Les additions sont faites modulo 2. Pour le cas de la figure 1.4 ($m = 2$), les polynômes générateurs $g_i = [g_{i,0}, g_{i,1}, g_{i,2}]$, ($i \in \{1, 2\}$) sont $g_1 = [1, 1, 1] = 7_{(octal)}$ et $g_2 = [1, 0, 1] = 5_{(octal)}$.

Nous présentons brièvement dans la section suivante le décodage des codes convolutifs utilisant l'algorithme BCJR [1, 26, 52].

1.5.2 Décodage des codes convolutifs

Représentation du code convolutif

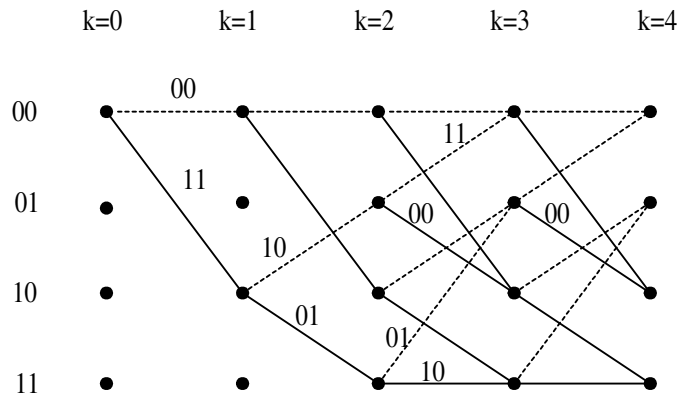


Fig. 1.5 : Treillis du code convolutif NRNSC de polynômes générateurs $(7,5)_{octal}$

Dans la figure 1.5, nous considérons la représentation du code convolutif NRNSC de la figure 1.4 sous forme de treillis. Chaque bloc de $n = 2$ éléments binaires en sortie du codeur dépend du bloc de $k = 1$ élément binaire à l'entrée et aussi des $m = 2$ blocs présents précédemment. Ainsi, $mk = 2$ éléments binaires définissent l'état du codeur. Les quatre états possibles du codeur sont alors : 00 ; 01 ; 10 ; 11.

Nous supposons que l'état initial est 00. A chaque branche du diagramme est associé un couple binaire disponible en sortie du codeur. De chaque nœud du treillis, partent deux branches associées respectivement à la présence d'un bit égal à 1 (en trait plein) et d'un bit égal à 0 (en trait pointillé) à l'entrée du codeur. La succession de branches constitue un chemin dans le diagramme en treillis.

Décodage des codes convolutifs suivant le critère MAP

Pour les récepteurs itératifs que nous considérons, nous avons besoin d'informations souples sur les bits codés. Plusieurs algorithmes qui calculent les probabilités *a posteriori* sur les bits codés ont été proposés. Dans cette thèse, nous utilisons un décodeur selon le critère MAP qui est mis en oeuvre par l'algorithme BCJR. Cet algorithme utilise la structure en treillis du code et est implanté de la même manière que l'égaliseur présenté dans la section 1.4.2. Un codeur de canal est généralement utilisé suivi d'un entrelaceur. Dans la section suivante, nous expliquons la fonction de l'entrelaceur.

1.6 Entrelaceur

Les codes convolutifs sont conçus pour lutter contre les erreurs dues au canal de transmission et supposées indépendantes, comme celles qui se présentent en sortie d'un canal BABG. Cependant, dans le cas des canaux sélectifs en temps et/ou en fréquence, les erreurs se produisent par paquets et ne sont donc plus indépendantes. Une solution pour bien exploiter la capacité du décodeur est d'entrelacer (permuter) les données codées. A la réception, le désentrelaceur réordonne les symboles reçus avant de les fournir au décodeur. Ainsi, les erreurs à l'entrée du décodeur deviennent quasiment indépendantes.

Il existe plusieurs méthodes d'entrelacement [33]. La décorrélation est idéale si l'entrelaceur est de taille infinie et si la règle de lecture de l'entrelaceur est aléatoire. Dans cette thèse, nous utilisons un entrelaceur aléatoire.

La présence de l'entrelaceur est aussi nécessaire quand un récepteur itératif est utilisé. Dans ce qui suit, nous présentons le principe d'un turbo-détecteur.

1.7 Turbo-détecteur

Nous considérons à l'émission les modulations codées à entrelacement aléatoire de bits (BICM : Bit Interleaved Coded Modulation). C'est un schéma de modulation codée obtenu par la concaténation d'un codeur binaire et d'un modulateur séparés par un entrelaceur bit. A la réception et dans le cas d'une transmission codée sur un canal BABG, nous considérons un turbo-démodulateur formé par un démodulateur et un décodeur. Dans le cas d'une transmission codée sur un canal sélectif en fréquence, nous utilisons un turbo-détecteur constitué d'un égaliseur et d'un décodeur à entrées et sorties pondérées (SISO : soft-input soft-output) [13]. L'idée de base du récepteur itératif est d'échanger des informations extrinsèques sur les bits codés entre les différents modules du récepteur pour améliorer les performances au fil des itérations. Ici, nous considérons un récepteur itératif formé par un détecteur MAP et un décodeur MAP. Les informations extrinsèques fournies à un module sont généralement des Logarithmes de Rapport de Vraisemblance (LRVs) extrinsèques qui sont donnés par la différence entre les LRVs *a posteriori* et les LRVs *a priori* (calculés par ce même module). Nous allons présenter dans chaque chapitre le principe de chaque récepteur utilisé.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les caractéristiques du canal de transmission radiomobile. Lorsque la dispersion temporelle [5] est supérieure à la durée symbole, le canal est sélectif en fréquence et introduit de l'IES. Dans ce cas, un égaliseur doit être utilisé. Ainsi, nous avons présenté les grandes familles d'égaliseurs et nous avons fixé notre choix sur l'égaliseur optimal suivant le critère MAP. Cet égaliseur réalise les performances optimales en terme de TEB. Nous avons ensuite présenté les codes convolutifs et le principe de leur décodage utilisant l'algorithme BCJR. Puis, nous avons présenté le rôle de l'entrelaceur pour assurer la décorrélation des données à la sortie du décodeur et nous avons choisi d'utiliser un entrelaceur aléatoire.

Dans le chapitre suivant, nous étudions les performances de l'égaliseur MAP dans un turbo-détecteur et nous optimisons le choix du mapping.

Chapitre 2

Optimisation du mapping pour un turbo-déTECTEUR MAP avec connaissance parfaite du canal

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé le rôle de chaque bloc de la chaîne de transmission numérique. Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cas d'une transmission codée sur un canal sélectif en fréquence. Nous considérons au niveau du récepteur un turbo-déTECTEUR formé par un égaliseur et un décodeur basés sur le critère du Maximum *A Posteriori* (MAP) (voir section 1.4.1).

Nous nous intéressons au problème du choix du mapping en tenant compte de l'utilisation du turbo-déTECTEUR. En effet, le choix du mapping influence de manière significative les performances en termes de TEB d'une chaîne de transmission numérique. Lorsque l'égalisation et le décodage sont effectués de manière disjointe, le mapping optimal donnant les meilleures performances est le mapping de Gray. Ceci n'est pas vrai dans le cas où un turbo-déTECTEUR est utilisé. Dans la littérature, plusieurs travaux se sont intéressés à l'optimisation du mapping en présence d'un récepteur itératif. Ainsi, dans [41] une méthode d'optimisation du mapping a été proposée dans le cas d'une transmission codée sur un canal à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) quand un turbo-démodulateur est utilisé. Cette méthode utilise l'algorithme Binary Switching Algorithm (BSA) [53] pour trouver le mapping qui minimise des bornes analytiques sur la probabilité d'erreur à la sortie du démodulateur. Dans [9], l'étude a été effectuée dans le cas d'une trans-

mission codée sur un canal sélectif en fréquence, où un turbo-détecteur linéaire utilisant un égaliseur Minimum Mean Square Error (MMSE) est considéré. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'optimisation du mapping quand un turbo-détecteur utilisant un égaliseur MAP est considéré. A notre connaissance, aucun travail dans la littérature ne s'est intéressé à ce problème. Pour mener notre étude, nous proposons de calculer des approximations analytiques de la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur MAP alimenté par les informations *a priori* fournies par le décodeur supposées gaussiennes à fort Rapport Signal à Bruit (RSB). Cette étude a été effectuée dans [43] dans le cas d'une Modulation à Déplacement de Phase d'ordre 2 (MDP-2) et d'un canal fixe. Nous proposons de la généraliser aux modulations d'ordres élevés dans le cas d'une transmission sur un canal sélectif en fréquence fixe ou de Rayleigh par blocs. Nous utilisons ensuite l'algorithme BSA [53] pour trouver le mapping qui minimise les approximations analytiques des probabilités d'erreur à la sortie de l'égaliseur, quand les informations *a priori* fournies par le décodeur sont supposées fiables. En effet, une recherche exhaustive de ce mapping est très compliquée à mettre en oeuvre quand l'ordre de la modulation est élevé. Notons aussi que notre étude est effectuée à fort RSB. Le mapping trouvé permet donc de minimiser la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur uniquement à fort RSB. Nous proposons donc par analogie avec la modulation adaptative d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission.

Nous commençons ce chapitre par une modélisation du système et une présentation du turbo-détecteur MAP. Ensuite, nous donnons une analyse des performances de l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* provenant du décodeur. Puis, nous calculons des approximations analytiques de la Probabilité d'Erreur Binaire (PEB) à la sortie de l'égaliseur pour les canaux sélectifs en fréquence fixes ou de Rayleigh par blocs, quand les informations *a priori* provenant du décodeur sont assez fiables [46] (les erreurs se produisent en majorité de manière isolée à la sortie de l'égaliseur). En nous basant sur ces expressions, nous optimisons le choix du mapping quand un turbo-détecteur est utilisé, à fort RSB. Enfin, nous proposons d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission.

2.2 Modélisation du système

Nous considérons à l'émission une modulation codée à entrelacement aléatoire de bits (BICM : Bit Interleaved Coded Modulation) à travers un canal sélectif en fréquence (figure 2.1). Notre choix du BICM provient du fait qu'il est robuste aux changements de

canal et permet d'avoir de bonnes performances aussi bien sur le canal de Rayleigh que sur le canal BABG [31, 49, 54].

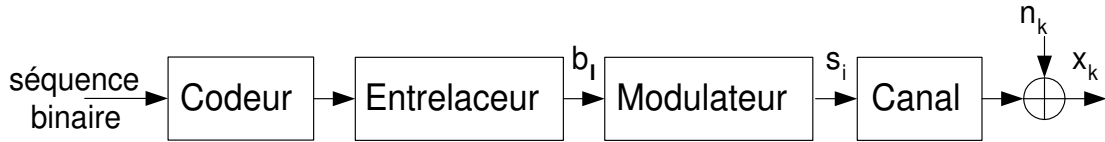


Fig. 2.1 : Structure de l'émetteur

Nous supposons que la transmission se fait par blocs de N_b symboles et que le canal est invariant durant la transmission d'un bloc et peut varier d'un bloc à un autre dans le cas du canal de Rayleigh. Les blocs sont organisés en groupes de G blocs dans le but d'avoir une distribution des informations *a priori* à l'entrée de l'égaliseur indépendante de la réalisation du canal. Dans le cas d'un canal de Rayleigh par blocs, cette hypothèse est nécessaire dans le calcul de la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur. Nous notons $N = GN_b$ avec $G = 1$ pour le cas d'un canal fixe. La séquence d'information binaire d'entrée est codée avec un codeur convolutif non récursif et non systématique de rendement R_c (donnant lieu à une séquence de G blocs codés). Chaque séquence codée est entrelacée puis modulée selon l'alphabet Ω de taille 2^q , où $q \geq 1$ est le nombre de bits par symbole. Après échantillonnage au rythme symbole, le signal reçu à un instant k est donné par :

$$x_k = \sum_{i=0}^{L-1} h_i s_{k-i} + n_k,$$

où s_k , pour $0 \leq k \leq N_b - 1$, sont les symboles transmis avec une énergie moyenne E_s et, pour $1 - L \leq k \leq -1$, des symboles virtuels connus du récepteur et pouvant être pris égaux à zéro, n_k sont des échantillons indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) d'une variable aléatoire gaussienne complexe de moyenne nulle et de variance σ^2 . La mémoire du canal est $L - 1$ ($L \geq 1$). Le terme h_i , pour $0 \leq i \leq L - 1$, représente le $i^{\text{ème}}$ coefficient complexe du canal.

Nous notons par $E_b = \frac{E_s}{q}$ l'énergie moyenne reçue par bit d'information et par $E_b^c = R_c E_b$ l'énergie binaire moyenne des bits codés, en négligeant les bits de terminaison du treillis du codeur.

Nous considérons des modulations MDP et des Modulations d'Amplitude en Quadrature (MAQ) pour deux types de canaux :

- Les canaux fixes sélectifs en fréquence. Ils sont constants durant la transmission de tous les blocs et ils sont normalisés selon $\|\underline{h}\|^2 = \sum_{i=0}^{L-1} |h_i|^2 = 1$.

- Les canaux de Rayleigh par blocs, sélectifs en fréquence. Ils sont constants sur chaque bloc de taille N_b et varient d'un bloc à un autre. Les coefficients de ces canaux h_i sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. ayant une densité de probabilité (ddp) gaussienne complexe $N_{\mathbb{C}}(0, \sigma_i^2)$, avec $\sum_{i=0}^{L-1} |\sigma_i|^2 = 1$, où $N_{\mathbb{C}}(\alpha, \sigma^2)$ représente une distribution gaussienne complexe de moyenne α et de variance σ^2 .

Nous présentons dans la section suivante le turbo-détecteur basé sur le critère MAP que nous utilisons dans la suite du chapitre.

2.3 Structure du turbo-détecteur MAP

Le récepteur optimal correspondant à l'émetteur de la figure 2.1 est un récepteur qui effectue l'égalisation et le décodage de manière conjointe. Cependant, ce récepteur est très complexe à mettre en œuvre à cause de la présence de l'entrelaceur. Une solution sous-optimale réalisant un bon compromis complexité/performances consiste à utiliser un récepteur itératif constitué d'un égaliseur et d'un décodeur, à entrées et sorties pondérées (SISO : Soft-Input Soft-Output). L'idée de base du récepteur itératif est d'échanger des informations extrinsèques (en général des LRVs) sur les bits codés entre les différents étages du récepteur, pour améliorer les performances au fil des itérations. Les algorithmes optimaux à entrées et sorties pondérées, en termes de PEB, utilisés pour l'égalisation et le décodage, sont basés sur le critère MAP [1,26,52] (voir section 1.4.1). Il est à noter que l'étude des performances de ce type d'égaliseur dans un turbo-détecteur n'a pas encore été traitée dans la littérature quand des modulations d'ordres élevés sont utilisées. L'étude a été faite uniquement dans le cas d'une modulation MDP-2 [43]. Dans ce chapitre, nous considérons le turbo-détecteur de la figure 2.2, formé par un égaliseur et un décodeur utilisant le critère MAP.

Dans un turbo-détecteur, à chaque itération, l'égaliseur et le décodeur échangent des informations extrinsèques et les utilisent comme informations *a priori* dans le but d'améliorer leurs performances [13,19,36]. Soit $\tilde{\underline{b}} = (\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{qN-1})^T$ la séquence bipolaire, à l'émission, associée à la séquence binaire à la sortie de l'entrelaceur $\underline{b} = (b_0, \dots, b_{qN-1})^T$, telle que $\tilde{b}_k = 2b_k - 1$ où $\tilde{b}_k \in \{+1, -1\}$, pour $0 \leq k \leq qN - 1$. L'égaliseur MAP calcule les probabilités *a posteriori* sur les bits codés \tilde{b}_k , $P^{eq}(\tilde{b}_k | \underline{x}, \tilde{\underline{l}}^{dec})$, où $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{N-1})^T$ est le vecteur des symboles reçus et $\tilde{\underline{l}}^{dec} = (\tilde{l}_0^{dec}, \dots, \tilde{l}_{qN-1}^{dec})^T$ représente le vecteur des LRVs

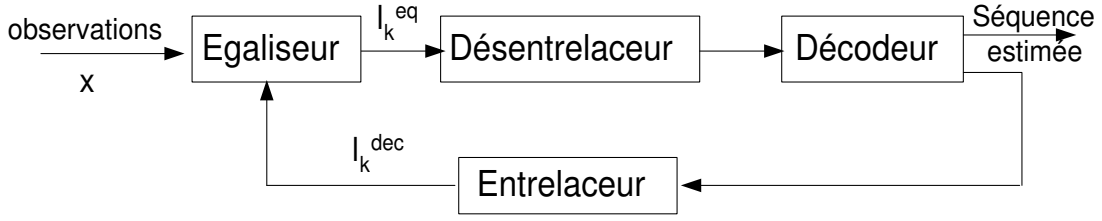


Fig. 2.2 : Structure du turbo-détecteur

extrinsèques à la sortie du décodeur après entrelacement. La sortie de l'égaliseur est souvent exprimée sous la forme de LRVs extrinsèques [45, 51] ayant l'expression suivante :

$$l_k^{eq} = \log \frac{P^{eq}(\tilde{b}_k = +1 | \underline{x}, \tilde{l}^{dec})}{P^{eq}(\tilde{b}_k = -1 | \underline{x}, \tilde{l}^{dec})} - \tilde{l}_k^{dec},$$

où le premier terme représente les LRVs *a posteriori*, calculés par l'égaliseur, et le deuxième terme représente les LRVs *a priori* fournis par le décodeur. A la première itération, les LRVs *a priori* sont nuls, puisqu'aucune information *a priori* n'est disponible à l'entrée de l'égaliseur. Les LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur l_k^{eq} passent à travers le désentrelaceur, puis sont utilisés comme informations *a priori* par le décodeur MAP afin d'améliorer ses performances. Ce dernier calcule les probabilités *a posteriori* sur les bits codés $P^{dec}(\tilde{b}_k | \tilde{l}^{eq})$, où $\tilde{l}^{eq} = (\tilde{l}_0^{eq}, \dots, \tilde{l}_{qN-1}^{eq})^T$ est la version désentrelacée de \underline{l}^{eq} , et donne à sa sortie les LRVs extrinsèques sur les bits codés :

$$l_k^{dec} = \log \frac{P^{dec}(\tilde{b}_k = +1 | \tilde{l}^{eq})}{P^{dec}(\tilde{b}_k = -1 | \tilde{l}^{eq})} - \tilde{l}_k^{eq},$$

Ces LRVs extrinsèques sont ensuite entrelacés et fournis à l'égaliseur comme étant des informations *a priori* à l'itération suivante. Après un certain nombre d'itérations du récepteur, le décodeur prend des décisions dures sur les bits d'information.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions analytiquement les performances de l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* fournies par le décodeur. Deux types de canaux sélectifs en fréquence sont considérés : des canaux fixes et des canaux de Rayleigh par blocs. Cette étude nécessite une modélisation des LRVs extrinsèques présents

à la sortie du décodeur qui elle même nécessite une modélisation des LRVs à la sortie de l'égaliseur. Nous proposons, dans la section suivante, d'étudier la distribution des LRVs dans le cas d'une transmission sur un canal BABG. Nous considérons le cas d'un récepteur non itératif (démodulateur seul) puis d'un récepteur itératif (turbo-démodulateur). Cette étude nous permettra d'avoir une intuition sur la distribution des LRVs dans le cas du canal sélectif en fréquence que nous confirmerons dans la section 2.5.

2.4 Modélisation des LRVs

En supposant que la longueur de l'entrelaceur est assez grande, les LRVs extrinsèques sont quasi-indépendants aussi bien à la sortie de l'égaliseur qu'à la sortie du décodeur. Nous nous intéressons dans cette section à l'étude des distributions de ces LRVs. Notons que dans le cas particulier d'une modulation MDP-2, cette distribution est approximée par une gaussienne [43].

Nous commençons par donner la distribution des LRVs à la sortie d'un canal BABG quand la modulation utilisée est une modulation MDP-2. Ensuite, nous considérons le cas des modulations d'ordres élevés et nous proposons une étude analytique de la distribution des LRVs à la sortie d'un démodulateur dans le cas d'une transmission non codée sur un canal BABG non sélectif en fréquence et sans informations *a priori*. Puis, nous étudions par simulations les distributions des LRVs extrinsèques à la sortie du démodulateur et du décodeur dans un turbo-démodulateur dans le cas d'une transmission codée sur un canal BABG non sélectif en fréquence.

2.4.1 Distribution des LRVs à la sortie d'un canal BABG pour une MDP-2

Nous proposons de commencer par le cas simple d'une transmission de symboles MDP-2 sur un canal BABG. La sortie de ce canal échantillonnée à l'instant k est :

$$r_k = s_k + w_k,$$

où $s_k \in \{+1, -1\}$ et w_k sont les échantillons indépendants d'un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Ainsi, les LRVs à la sortie du canal BABG sont :

$$LRV(s_k) = \ln \frac{p(r_k | s_k = 1)}{p(r_k | s_k = -1)} = \ln \frac{\exp\left(-\frac{|r_k - 1|^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{|r_k + 1|^2}{2\sigma^2}\right)} = \frac{2}{\sigma^2} r_k = \frac{2}{\sigma^2} s_k + \frac{2}{\sigma^2} w_k.$$

Ces LRVs sont donc modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne $N\left(\frac{2s_k}{\sigma^2}, \frac{4}{\sigma^2}\right)$ dite symétrique (sa variance est la double de la valeur absolue de sa moyenne) [12, 14, 50].

2.4.2 Modélisation des LRVs *a posteriori* : Cas d'un canal BABG non sélectif en fréquence pour une MDP-8

Nous considérons la transmission de symboles modulés, sur un canal BABG non sélectif en fréquence, avec un bruit de variance $N_0 = \sigma^2$. Nous considérons ici uniquement la modulation MDP-8 avec un mapping de Gray (figure 2.3). Cependant, la généralisation à d'autres types de modulations est simple. Un démodulateur est utilisé pour estimer les bits émis.

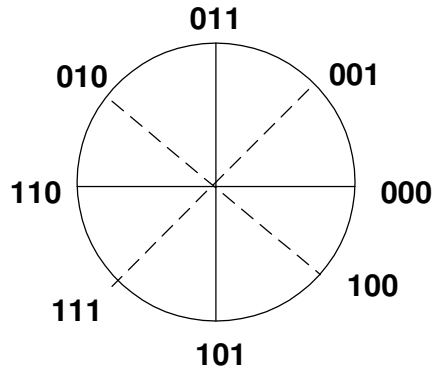


Fig. 2.3 : Constellation de la modulation MDP-8 avec mapping de Gray

Nous notons les trois bits d'un symbole dans l'ordre en partant de la gauche $b_0 b_1 b_2$. Nous notons, de plus, $\tilde{b}_i = 2b_i - 1$, $i \in \{0, 1, 2\}$ les symboles bipolaires correspondant aux bits b_i . Nous montrons dans l'Annexe A que les LRVs *a posteriori* pour le bit b_2 sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne de la

forme $N\left(\frac{\tilde{b}_2}{4\sigma^2}(2-\sqrt{2}), \frac{1}{2\sigma^2}(2-\sqrt{2})\right)$. Cependant, pour les bits b_0 et b_1 les LRVs *a posteriori* sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec un mélange équitable de ddps gaussiennes de la forme $N\left(\frac{\tilde{b}_i}{4\sigma^2}(2-\sqrt{2}), \frac{1}{2\sigma^2}(2-\sqrt{2})\right)$ et $N\left(\frac{\tilde{b}_i}{2\sigma^2}, \frac{1}{\sigma^2}\right)$, $i \in \{0, 1\}$. Ainsi les LRVs *a posteriori* à la sortie du démodulateur sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec un mélange de ddps gaussiennes de rapport 2/3 pour la gaussienne $N\left(\frac{\tilde{b}_i}{4\sigma^2}(2-\sqrt{2}), \frac{1}{2\sigma^2}(2-\sqrt{2})\right)$ et de rapport 1/3 pour la gaussienne $N\left(\frac{\tilde{b}_i}{2\sigma^2}, \frac{1}{\sigma^2}\right)$, $i \in \{0, 1, 2\}$

Pour valider les résultats analytiques, nous représentons sur les figures 2.4a, 2.4b et 2.4c les distributions des LRVs *a posteriori* à la sortie du démodulateur pour un rapport $E_b/N_0 = 5dB$ respectivement pour les bits b_0 , b_1 et b_2 . Les courbes en traits discontinus montrent les distributions obtenues théoriquement et les courbes en pointillés montrent les distributions obtenues par simulations. Les figures confirment la présence des gaussiennes avec les rapports 2/3 et 1/3 trouvées théoriquement. Nous concluons que l'une des gaussiennes $\left(N\left(\frac{\tilde{b}_i}{4\sigma^2}(2-\sqrt{2}), \frac{1}{2\sigma^2}(2-\sqrt{2})\right)\right)$ est dominante par rapport à l'autre.

Remarque 1 : Calcul de la probabilité d'erreur :

Ainsi, nous pouvons approximer la probabilité d'erreur binaire à la sortie du démodulateur par :

$$P_e = \frac{1}{3} \left[2Q\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\sigma}\right) + Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right], \quad (2.1)$$

où $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$.

*Nous rappelons que pour une transmission de symboles MDP-2 à travers un canal BABG de moyenne nulle et de variance σ_1^2 , les LRVs *a posteriori* des symboles sont des variables aléatoires i.i.d avec une ddp égale à $N\left(\frac{2s_k}{\sigma_1^2}, \frac{4}{\sigma_1^2}\right)$ et que la PEB est égale à :*

$$P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma_1}\right). \quad (2.2)$$

A fort E_b/N_0 , la PEB peut être approximée par :

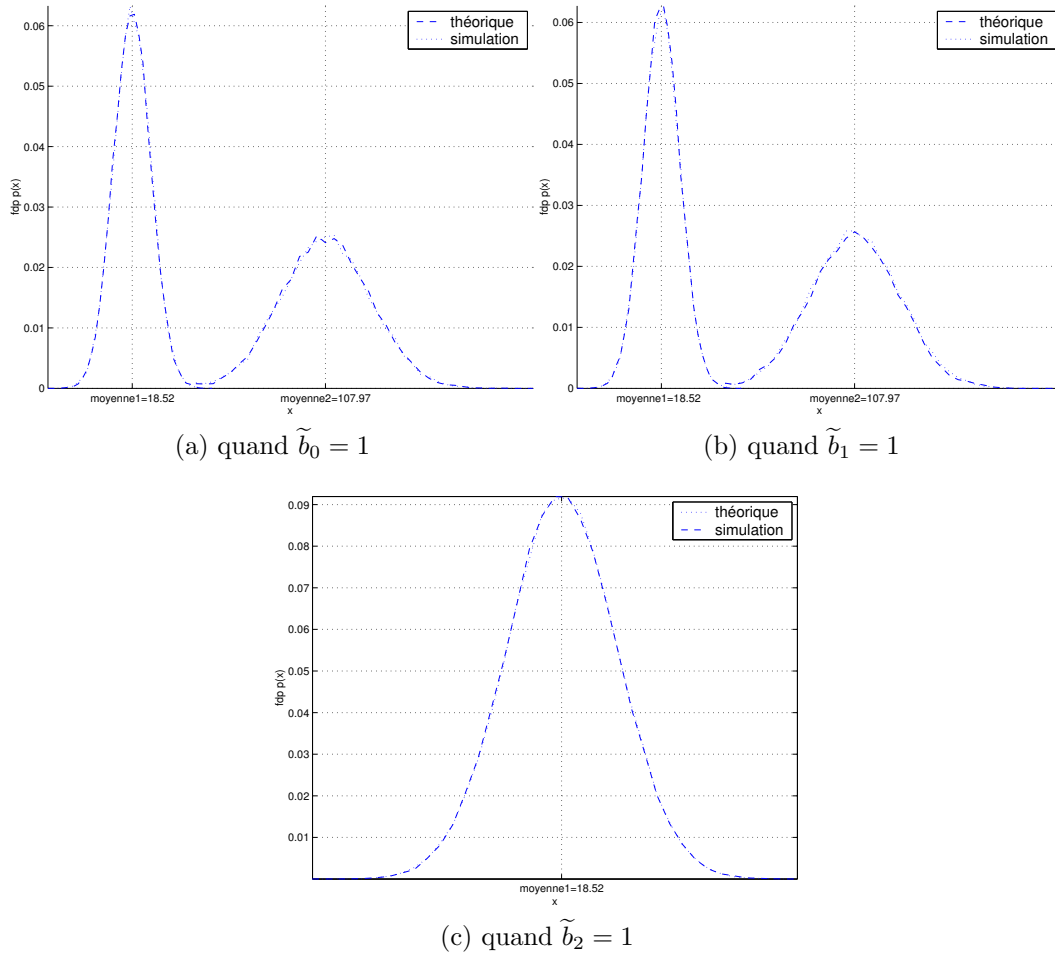


Fig. 2.4 : Distribution des LRVs *a posteriori* à la sortie du démodulateur à travers un canal BABG non sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$.

$$P_e \simeq \frac{2}{3} Q \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (2.3)$$

Notons que ce calcul a été fait pour le cas de la modulation MDP-8 avec un mapping de Gray et qu'il peut être fait de la même manière pour d'autres mappings et d'autres modulations. Notons aussi que l'expression de la PEB peut être approximée par une ou plusieurs gaussiennes suivant la modulation et le mapping.

La figure 2.5 montre le Taux d'Erreur Binaire (TEB) obtenu par simulations à la sortie du démodulateur en fonction de E_b/N_0 . La figure montre aussi les approximations de la PEB en fonction de E_b/N_0 obtenues théoriquement ((2.1) et (2.3)). Nous remarquons

que toutes ces courbes coïncident à fort rapport E_b/N_0 .

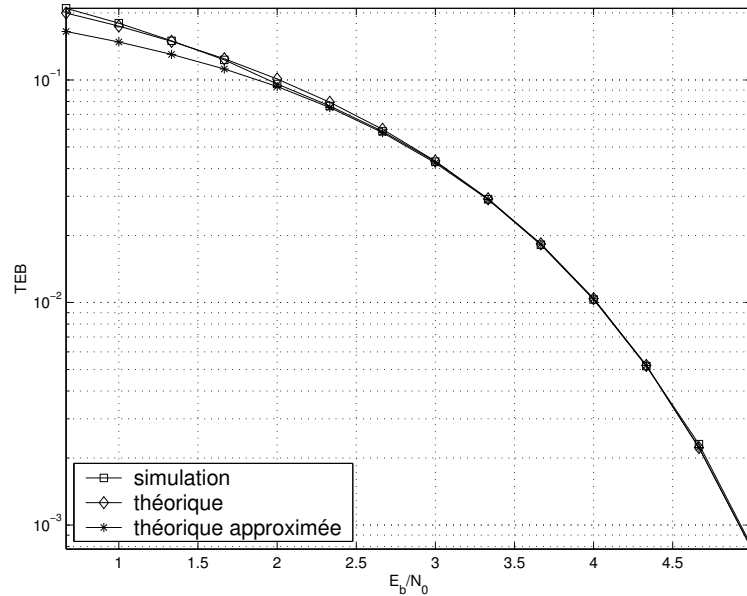


Fig. 2.5 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie du démodulateur obtenues par simulations et celles basées sur l'expression théorique (2.1) et l'expression théorique approximée (2.3) : canal BABG, modulation MDP-8 avec un mapping de Gray.

2.4.3 Modélisation des LRVs extrinsèques : Cas d'un turbo-démodulateur sur un canal BABG non sélectif en fréquence pour une MDP-8

Nous considérons maintenant un schéma BICM où les symboles sont modulés en MDP-8 avec un mapping de Gray (figure (2.3)), sur un canal BABG non sélectif en fréquence, avec un bruit de variance $N_0 = \sigma^2$. Un turbo-démodulateur est utilisé au niveau du récepteur.

Nous représentons sur les figures 2.6 et 2.7 les distributions des LRVs *extrinsèques* à la 3^{ème} itération du turbo-démodulateur obtenues par simulations pour un rapport $E_b/N_0 = 5dB$, quand le bit codé est égal à 1 respectivement à la sortie du démodulateur et à la sortie du décodeur. Les bits d'information sont codés en utilisant un code convolutif de rendement 1/2 et de polynômes générateurs (7, 5) en octal. La figure 2.6 montre que la distribution à la sortie du démodulateur est un mélange de gaussiennes avec les rapports 2/3 et 1/3. La figure 2.7 montre que la distribution des LRVs à la sortie du décodeur est un mélange de deux gaussiennes symétriques dont l'une est dominante par rapport

à l'autre. Les simulations dans le cas du canal sélectif en fréquence, que nous donnerons dans la section 2.5.1, montrent aussi que la distribution des LRVs à la sortie du décodeur est un mélange gaussien avec une gaussienne dominante. Dans la suite, nous allons donc supposer que la distribution des LRVs à la sortie du décodeur est approximée par une distribution gaussienne. Nous proposons dans la section suivante d'analyser sous cette hypothèse les performances de l'égaliseur MAP dans le turbo-décodeur pour le cas d'un canal fixe et le cas d'un canal de Rayleigh par blocs.

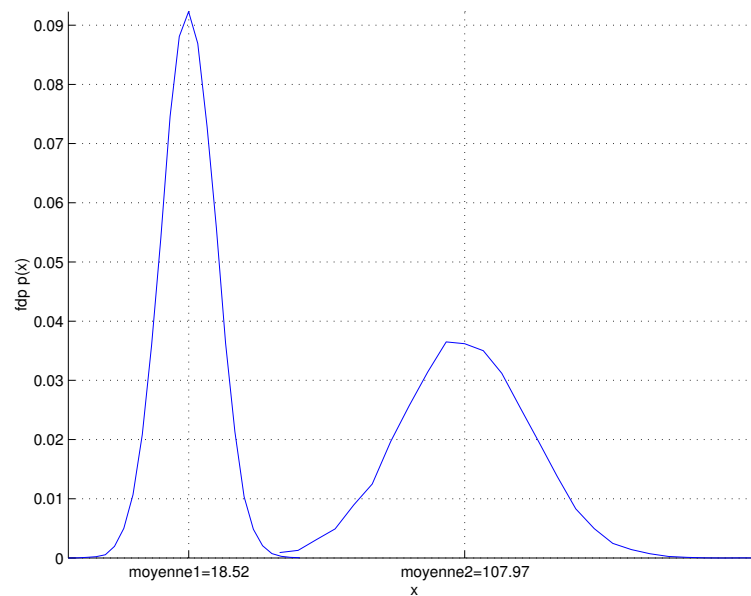


Fig. 2.6 : Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du démodulateur à travers un canal BABG non sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$, à la 3^{ème} itération du turbo-décodeur quand le bit codé est égal à 1.

2.5 Analyse des performances de l'égaliseur MAP dans le turbo-décodeur

Dans cette partie, nous proposons d'étudier analytiquement les performances de l'égaliseur MAP alimenté par les LRVs *a priori* calculés par le décodeur. Nous supposons, comme expliqué à la fin de la section 2.4, que la distribution de ces LRVs est approximée par une gaussienne. L'analyse des performances sera faite pour l'égaliseur

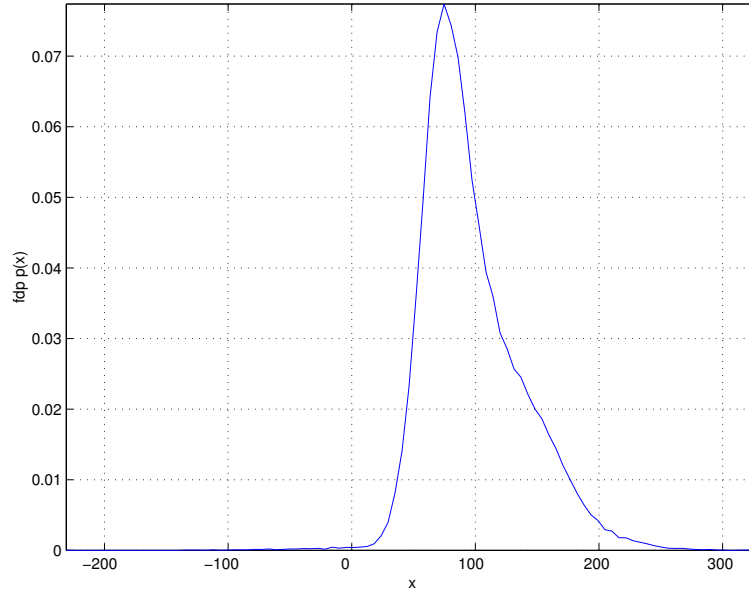


Fig. 2.7 : Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur à travers un canal BABG non sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$, à la 3^{ème} itération du turbo-démodulateur quand le bit codé est égal à 1.

utilisant le critère MAP séquence qui permet de maximiser la probabilité *a posteriori* de la séquence émise sachant la séquence d'observations \underline{x} et la séquence des informations *a priori* \underline{l}^{dec} :

$$\hat{\underline{s}} = \arg \max_{\underline{a} \in \Omega^{N_b}} P(\underline{s} = \underline{a} | \underline{x}, \underline{l}^{dec}),$$

où \underline{a} une séquence de symboles de l'alphabet Ω , $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{N_b-1})^T$ et $\underline{l}^{dec} = (l_0^{dec}, \dots, l_{N_b-1}^{dec})^T$. Cette étude reste valable pour l'égaliseur MAP symbole puisqu'il a été montré dans [3, page 814] que l'égaliseur MAP séquence et l'égaliseur MAP symbole ont les mêmes performances à fort RSB.

Nous commençons par donner une approximation analytique de la PEB sur les bits codés à la sortie de l'égaliseur quand le canal est fixe. Ensuite, nous calculons une approximation asymptotique de cette PEB à la sortie de l'égaliseur MAP quand les LRVs *a priori* sont fiables (fort RSB). Puis, nous étudions les distributions des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur et du décodeur afin de valider l'approximation gaussienne que nous avons considérée. En nous basant sur l'expression de la PEB dans le cas d'un canal fixe, nous donnons une approximation analytique de la PEB à la sortie de l'égaliseur dans le cas d'un canal de Rayleigh par blocs, quand les informations *a priori* sont fiables.

2.5.1 Cas d'un canal fixe

Nous supposons que les LRVs *a priori* fournis par le décodeur sur les bits codés peuvent être approximés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp de la forme $N\left(\frac{2\tilde{b}_k\sqrt{E_b^c}}{\sigma_{eq,in}^2}, \frac{4\sqrt{E_b^c}}{\sigma_{eq,in}^2}\right)$. Tout se passe comme si ces LRVs sont calculés à partir d'observations *a priori* à l'entrée de l'égaliseur qui sont les sorties d'un canal BABG de moyenne nulle et de variance $\sigma_{eq,in}^2$ (voir section 2.4.1). Nous commençons par donner une approximation analytique de la PEB à la sortie de l'égaliseur MAP.

Approximation de la probabilité d'erreur binaire

Soit $\zeta_k = (s_{k-1}, \dots, s_{k-L+1})$ un état du treillis de l'égaliseur à l'instant k [3, 16]. Nous disons qu'un événement d'erreur s'étend de l'instant k_1 à l'instant k_2 , si les états estimés et les vrais états sont égaux aux instants k_1 et k_2 et sont différents pour $k_1 < k < k_2$. Nous notons \underline{b}_e le vecteur des bits transmis (codés) et $\hat{\underline{b}}_e$ le vecteur des bits estimés correspondant à un événement d'erreur donné. Posons $\underline{e}_b = \hat{\underline{b}}_e - \underline{b}_e$ le vecteur d'erreur binaire, $m(\underline{e}_b)$ le nombre de décisions erronées sur les bits et $P(\underline{e}_b)$ la probabilité d'occurrence de \underline{e}_b . La probabilité d'erreur binaire P_e est majorée comme suit :

$$P_e \leq \frac{1}{q} \sum_{\underline{e}_b \in \xi_b} m(\underline{e}_b) P(\underline{e}_b), \quad (2.4)$$

où ξ_b est l'ensemble de tous les vecteurs d'erreurs binaires non nuls \underline{e}_b correspondant à l'ensemble des événements d'erreurs potentiels. Soient ξ_{e_b} l'ensemble de tous les vecteurs d'erreur symbole possibles \underline{e} correspondant à \underline{e}_b et $P(\underline{e}_b, \underline{e})$ la probabilité d'avoir \underline{e}_b et \underline{e} en même temps. La probabilité de \underline{e}_b est donnée par :

$$P(\underline{e}_b) = \sum_{\underline{e} \in \xi_{e_b}} P(\underline{e}_b, \underline{e}). \quad (2.5)$$

En utilisant (2.4) et (2.5), la PEB à la sortie de l'égaliseur est majorée comme suit :

$$P_e \leq \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi} m(\underline{e}_b) P(\underline{e}_b, \underline{e}),$$

où ξ représente l'ensemble de tous les couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ correspondant à l'ensemble des événements d'erreurs potentiels. Nous notons $A(\underline{e}_b, \underline{e})$ l'événement que la séquence transmise \underline{b}_e des bits de données soit compatible avec l'occurrence de \underline{e}_b et \underline{e} . Alors, l'événement d'erreur caractérisé par \underline{e} et \underline{e}_b a lieu lorsque $A(\underline{e}_b, \underline{e})$ se produit et le vecteur estimé $\widehat{\underline{b}}_e = \underline{b}_e + \underline{e}_b$ a une meilleure métrique selon le critère MAP séquence que n'importe quel autre vecteur de bits possible y compris \underline{b}_e . Ainsi, la probabilité de $(\underline{e}_b, \underline{e})$ est majorée par :

$$P(\underline{e}_b, \underline{e}) \leq P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e},$$

où $P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e}$ est la probabilité que le vecteur erroné des bits estimés $\widehat{\underline{b}}_e = \underline{b}_e + \underline{e}_b$ ait une meilleure métrique que le vecteur \underline{b}_e . Cette probabilité d'erreur par paire est la probabilité que l'égaliseur utilisant le critère MAP séquence et ayant des informations *a priori* à son entrée choisisse $\widehat{\underline{b}}_e$ au lieu de \underline{b}_e . Elle est indépendante de \underline{b}_e et dépend uniquement de \underline{e} et \underline{e}_b lorsque l'événement $A(\underline{e}_b, \underline{e})$ est vérifié et elle est donnée par :

$$P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e} = Q\left(\frac{\sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq,in}^2}}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

où $\underline{d}(\underline{e})$ est le produit de convolution de \underline{e} avec la réponse impulsionnelle du canal et $\mu_{eq,in} \triangleq \frac{\sigma}{\sigma_{eq,in}}$. Le calcul de $P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e}$ est donné dans l'Annexe B. Ainsi,

$$P_e \leq \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi} m(\underline{e}_b) P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) Q\left(\frac{\sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq,in}^2}}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (2.6)$$

Soit ξ_{\min} le sous-ensemble de ξ contenant tous les couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ qui donnent la valeur minimale $\alpha_{\min} = \min_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi} (\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq,in}^2)$. Puisque la fonction $Q(\cdot)$ décroît exponentiellement, nous pouvons approximer la PEB P_e à fort rapport E_b/N_0 par :

$$P_e \simeq \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi_{\min}} m(\underline{e}_b) P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) Q\left(\sqrt{\frac{\alpha_{\min}}{2\sigma^2}}\right). \quad (2.7)$$

La difficulté dans le calcul de (2.7) réside dans la détermination des couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ qui donnent la valeur minimale α_{\min} . En effet, sans aucune hypothèse sur la taille des

événements d'erreurs, il est compliqué d'étudier et d'exploiter cette probabilité dans le cas général. Nous proposons donc de faire l'étude dans le cas particulier où les informations *a priori* provenant du décodeur sont fiables. Dans ce cas, nous pouvons considérer, comme nous le montrerons dans ce qui suit, uniquement les événements d'erreurs contenant un seul bit erroné et par suite un seul symbole erroné.

Cas des informations *a priori* fiables

Nous présentons sur le tableau 2.1 les probabilités d'occurrence des erreurs isolées, des erreurs doubles et des erreurs multiples (nombre d'erreurs supérieur à 2) dans les événements d'erreurs obtenus par simulations pour différents nombres d'itérations du récepteur itératif, RSB, canaux de transmission et codeurs. Toutes les simulations sont faites pour une modulation MDP-8 avec un mapping de Gray.

D'après le tableau 2.1, la probabilité d'occurrence des erreurs isolées augmente avec

TABLEAU 2.1: Probabilités d'occurrence des erreurs binaires pour un canal connu et différentes conditions de simulations

Conditions / Probabilités d'erreur	P_e isolées	P_e doubles	P_e multiples
Polynômes générateurs=(7, 5) _{octal} , $E_b/N_0 = 5$ dB Canal=(0.5; 0.71; 0.5) et 1 ^{ère} itération	0.64	0.19	0.17
Polynômes générateurs=(7, 5) _{octal} , $E_b/N_0 = 5$ dB Canal=(0.5; 0.71; 0.5) et 3 ^{ème} itération	0.718	0.149	0.133
Polynômes générateurs=(7, 5) _{octal} , $E_b/N_0 = 7$ dB Canal=(0.5; 0.71; 0.5) et 3 ^{ème} itération	0.802	0.17	0.028
Polynômes générateurs=(7, 5) _{octal} , $E_b/N_0 = 3$ dB Canal=(0.5; 0.71; 0.5) et 3 ^{ème} itération	0.396	0.2376	0.3663
Polynômes générateurs=(7, 5) _{octal} , $E_b/N_0 = 5$ dB Canal=(0.11; 0.99) et 3 ^{ème} itération	0.806	0.118	0.076
Polynômes générateurs=(17, 15) _{octal} , $E_b/N_0 = 5$ dB Canal=(0.5; 0.71; 0.5) et 3 ^{ème} itération	0.865	0.114	0.021

l'augmentation du nombre d'itérations du turbo-détecteur et l'augmentation du RSB de transmission. Notons d_{min} la distance minimale du canal définie comme étant la valeur minimale de $\|d(\underline{e})\|$. La distance minimale pour le canal de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5) est $d_{min} = 1.53$ et pour le canal de réponse impulsionnelle (0.11; 0.99) est $d_{min} = 2.66$. D'après le tableau 2.1, la probabilité d'occurrence des erreurs isolées augmente avec l'augmentation de la distance minimale (canal peu sévère). Elle augmente

aussi quand le code est plus performant (le codeur de polynômes générateurs $(17, 15)_{octal}$ est meilleur que le codeur de polynômes générateurs $(7, 5)_{octal}$).

En effet, les LRVs *a priori* provenant du décodeur sont de plus en plus fiables quand le codeur est performant, le RSB est élevé, le canal est peu sévère et le nombre d'itérations du turbo-détecteur augmente. Ainsi, dans ce cas, la majorité des observations *a priori* ont plus d'influence sur la détection de l'égaliseur que les observations du canal [35, 43]. Vu que les LRVs *a priori* sont indépendants, la plupart des erreurs se produisent de manière isolée. Ainsi, nous considérons les événements d'erreur avec un seul bit erroné et par suite un seul symbole erroné. Ceci conduit à $m(\underline{e}_b) = 1$ et $\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 = \|\underline{e}\|^2$ puisque le canal est supposé normalisé. L'équation (2.7) devient :

$$P_e \simeq \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \tilde{\xi}_{\min}} P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) Q\left(\frac{\sqrt{e_{\min}^2 + 2E_b^c \mu_{eq, in}^2}}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

où e_{\min} est la valeur de $\|\underline{e}\|$ prise parmi l'ensemble des erreurs symboles avec un seul bit erroné minimisant $\sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2E_b^c \mu_{eq, in}^2}$ qui est donc la valeur minimale de $\|\underline{e}\|$, $\tilde{\xi}_{\min}$ contient les vecteurs d'erreur \underline{e}_b avec un seul bit erroné et les vecteurs d'erreur symbole correspondant \underline{e} qui donnent e_{\min} . Soit $K_{\min} = \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \tilde{\xi}_{\min}} P(A(\underline{e}_b, \underline{e}))$, nous obtenons :

$$P_e \simeq K_{\min} Q\left(\frac{\sqrt{e_{\min}^2 + 2E_b^c \mu_{eq, in}^2}}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (2.8)$$

Remarque 2 Notons que les valeurs de e_{\min} et de K_{\min} pour une modulation donnée dépendent uniquement du mapping. Ainsi, l'équation (2.8) ne dépend pas du canal. Nous pouvons conclure que pour un mapping donné, quand les informations *a priori* sont fiables, les performances du turbo-détecteur ne dépendent pas du canal. Ce résultat sera validé par les simulations dans la section 2.5.3.

Modélisation des LRVs extrinsèques

Dans cette section, nous avons supposé que la distribution des LRVs à la sortie du décodeur est approximée par une gaussienne. Dans ce qui suit, nous proposons d'utiliser nos résultats trouvés sous cette hypothèse pour calculer la distribution des LRVs

extrinsèques à la sortie de l'égaliseur. Dans le cas des informations *a priori* fiables, les erreurs isolées sont dominantes. En utilisant l'équation (2.6), la PEB à la sortie de l'égaliseur MAP peut donc être approximée par :

$$P_e \simeq \sum_{i=1}^I K_i Q \left(\frac{\sqrt{e_i^2 + 2E_b^c \mu_{eq,in}^2}}{\sqrt{2}\sigma} \right). \quad (2.9)$$

où $K_i = \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \tilde{\xi}_i} P(A(\underline{e}_b, \underline{e}))$, $\tilde{\xi}_i$ contient les vecteurs d'erreur \underline{e}_b avec un seul bit erroné et les vecteurs d'erreur symbole correspondant \underline{e} tels que $\|\underline{e}\| = e_i$ et I est le nombre de valeurs possibles de e_i . Les valeurs e_i sont classées dans l'ordre croissant. Ainsi $e_1 = e_{min}$. Nous notons que $\sum_{i=1}^I K_i = 1$.

En comparant les équations (2.2) et (2.9), nous pouvons conclure que la distribution des LRVs *a posteriori* à la sortie de l'égaliseur MAP alimenté par des informations *a priori* fiables peut être approximée par un mélange de I gaussiennes de moyennes nulles et de variances $\sigma_i^2 = \frac{2\sigma^2}{e_i^2 + 2E_b^c \mu_{eq,in}^2}$. Ainsi, nous pouvons modéliser les LRVs *a posteriori* à la sortie de l'égaliseur MAP par des échantillons i.i.d. d'une variable aléatoire dont la distribution est un mélange de gaussiennes de la forme $N\left(\frac{2\tilde{b}_k}{\sigma_i^2}, \frac{4}{\sigma_i^2}\right)$ avec des rapports égaux à K_i .

Rappelons que les LRVs *a priori* (extrinsèques) l_k^{eq} à la sortie de l'égaliseur sont donnés par la différence entre les LRVs *a posteriori* à la sortie de l'égaliseur et les LRVs *a priori* à l'entrée de l'égaliseur. D'autre part, vu la présence de l'entrelaceur, les LRVs *a priori* et les LRVs extrinsèques sont supposés indépendants [22]. Ainsi, la distribution des LRVs *a priori* l_k^{eq} est un mélange de gaussiennes,

$$N\left(\tilde{b}_k \left(\frac{2}{\sigma_i^2} - \frac{2E_b^c \mu_{eq,in}^2}{\sigma^2}\right), \left(\frac{4}{\sigma_i^2} - \frac{4E_b^c \mu_{eq,in}^2}{\sigma^2}\right)\right) = N\left(\tilde{b}_k \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2}\right), 2 \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2}\right)\right). \quad (2.10)$$

Nous proposons de valider ce résultat par simulations. Nous considérons la modulation MDP-8 avec un mapping de Gray, le code convolutif de polynômes générateurs (7, 5) ou (17, 15) et le canal de réponse impulsionnelle (0.817; 0.57) ou (0.5; 0.71; 0.5).

La figure 2.8 montre les distributions des LRVs extrinsèques à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur à la sortie de l'égaliseur MAP, quand $\tilde{b}_k = 1$ et pour différentes conditions de simulations. Les courbes obtenues théoriquement en utilisant 2.10 sont représentées en pointillés et les courbes obtenues par simulations sont représentées en traits discontinus. Ces figures montrent que la distribution des LRVs est un mélange de deux gaussiennes symétriques et que les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par

simulations. Nous expliquerons dans de qui suit comment nous avons tracé la distribution correspondant au mélange gaussien trouvé dans (2.10) sur la figure 2.8. En remarquant que $e_1^2 = e_{min}^2 = 2 - \sqrt{2}$ et $e_2^2 = 2 + \sqrt{2}$, nous trouvons que $\frac{e_{min}^2}{\sigma^2} = 18.5242$ et $\frac{e_2^2}{\sigma^2} = 107.97$ à $E_b/N_0 = 5dB$. Ces moyennes correspondent bien aux moyennes des gaussiennes trouvées dans la figure 2.8.

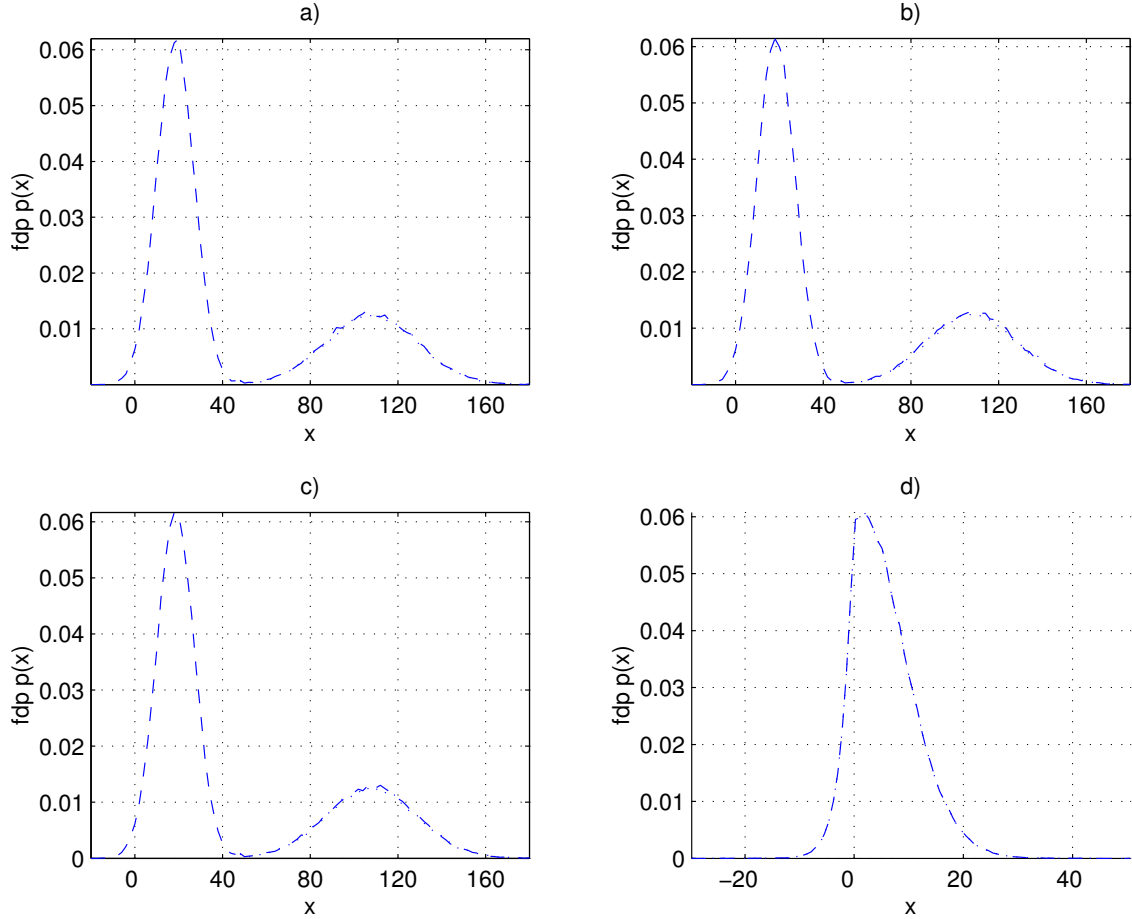


Fig. 2.8 : Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur MAP à travers un canal fixe sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle \underline{h} , à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur quand le bit codé est égal à 1 : a) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5; 0.71; 0.5)$, code(7, 5). b) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.817; 0.57)$, code(7, 5). c) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5; 0.71; 0.5)$, code(17, 15). d) $E_b/N_0 = 3dB$, $\underline{h}=(0.5; 0.71; 0.5)$, code(7, 5).

Dans le but de calculer $K_1 = K_{min}$, nous devons calculer $P(A(e_b, \underline{e}))$ pour chaque couple (e_b, \underline{e}) correspondant à un seul symbole erroné avec un seul bit erroné et donnant e_{min} . Pour le mapping de Gray de la figure 2.3, $A\left((0, 0, 1), \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) \sqrt{E_s}\right) = \{(0, 0, 0)\}$ et ainsi $P\left(A\left((0, 0, 1), \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) \sqrt{E_s}\right)\right) = \frac{1}{8}$. Pour ce mapping, il est

clair que toutes les probabilités $P(A(\underline{e}_b, \underline{e}))$ sont égales à $\frac{1}{8}$ et puisqu'il y a 16 couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ qui donnent cette valeur de e_{min} alors $K_{min} = \frac{2}{3}$. De même, nous pouvons montrer que $K_2 = \frac{1}{3}$.

Dans [17], il a été prouvé que lorsque la distribution des LRVs *a priori* à l'entrée du décodeur est une gaussienne symétrique alors la distribution des LRVs à sa sortie est aussi approximée par une gaussienne symétrique. Dans notre cas, la distribution des LRVs *a priori* fournis par l'égaliseur à l'entrée du décodeur est formée par deux gaussiennes symétriques de rapports 2/3 et 1/3. Nous pouvons alors conclure que la distribution des LRVs à la sortie du décodeur est alors un mélange de gaussiennes. La figure 2.9 montre la distribution des LRVs extrinsèques à la 1^{ère} et 3^{ème} itération du turbo-détecteur à la sortie du décodeur MAP pour $E_b/N_0 = 5dB$, quand le bit codé est égal à 1 et le code convolutif de polynômes générateurs (7, 5) est utilisé. Ces courbes montrent bien que la distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur MAP est formée par deux gaussiennes symétriques avec une gaussienne dominante.

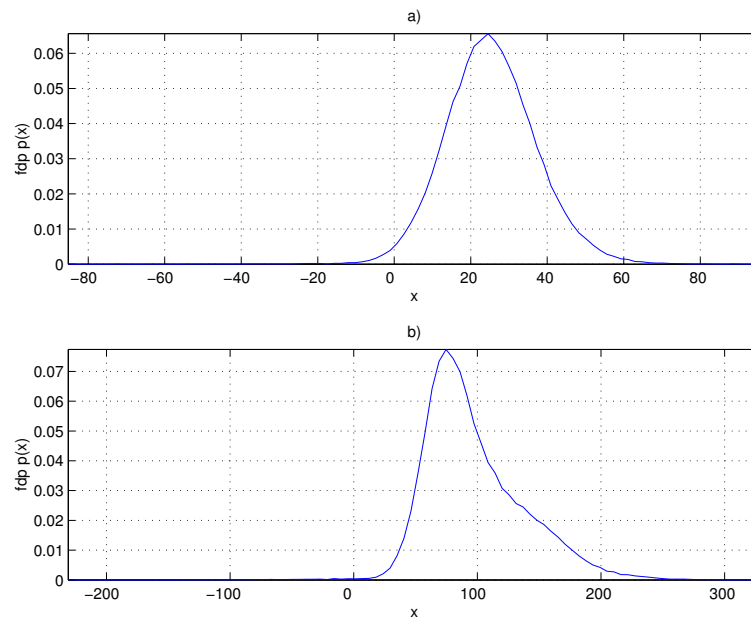


Fig. 2.9 : Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur MAP à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$ quand le bit codé est égal à 1 à la : a) 1^{ère} itération du turbo-détecteur et b) 3^{ème} itération du turbo-détecteur.

Jusqu'à présent, nous avons étudié analytiquement les performances de l'égaliseur

MAP en présence des informations *a priori* quand le canal est fixe. Nous proposons dans la suite d'étendre cette étude au cas d'un canal de Rayleigh par blocs.

2.5.2 Cas d'un canal de Rayleigh par blocs

En nous basant sur notre étude dans le cas du canal fixe, nous proposons de donner une approximation de la PEB à la sortie de l'égaliseur dans le cas d'un canal de Rayleigh par blocs. Les blocs sont organisés en groupes de G blocs. La séquence d'information binaire d'entrée est codée avec un codeur convolutif non récursif et non systématique. Chaque séquence codée est entrelacée par un entrelaceur aléatoire puis modulée selon l'alphabet Ω . Ainsi, nous supposons que $\mu_{eq,in}$ ne dépend pas de la réalisation du canal sur chaque bloc lorsque G est assez grand.

Les coefficients h_i du canal sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. ayant une ddp gaussienne complexe $N_{\mathbb{C}}(0, \sigma_i^2)$ avec $\sum_{i=0}^{L-1} |\sigma_i|^2 = 1$. Ainsi, $y = \|\underline{h}\|^2 = \sum_{i=0}^{L-1} |h_i|^2$ est la somme de L variables aléatoires ayant une distribution χ_2 avec deux degrés de liberté. En utilisant (2.8), la PEB à la sortie de l'égaliseur, quand les informations *a priori* provenant du décodeur sont fiables, peut être approximée par :

$$P_r \simeq \int_0^{\infty} P_e(y) p(y) dy, \quad (2.11)$$

où

$$P_e(y) \simeq K_{\min} Q \left(\frac{\sqrt{e_{\min}^2 y + 2E_b^c \mu_{eq,in}^2}}{\sqrt{2}\sigma} \right).$$

Nous proposons dans l'Annexe C de calculer la probabilité $p(y)$. Dans le cas particulier où tous les coefficients du canal ont des variances σ_i^2 deux à deux différentes, nous montrons qu'elle est donnée par :

$$p(y) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\alpha_i}{2\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_i^2}\right), \quad (2.12)$$

$$\text{où } \alpha_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{L-1} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 - \sigma_k^2}.$$

Nous montrons aussi dans l'Annexe C que la généralisation à d'autres cas où deux ou plusieurs variances sont égales est simple.

Pour simplifier l'expression (2.11), nous considérons la borne supérieure de la fonction $Q(\cdot)$ obtenue en utilisant la formule de Craig [47] :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Cette borne supérieure est une bonne approximation de $Q(x)$ quand x est grand. Ainsi, à fort RSB, l'équation (2.11) devient :

$$\begin{aligned} P_r &\simeq \frac{K_{\min}}{4} \exp\left(-\frac{E_b^c \mu_{eq,in}^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} \int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{e_{\min}^2}{4\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma_i^2}\right) y\right) dy \\ &\simeq K_{\min} \exp\left(-\frac{E_b^c \mu_{eq,in}^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\sigma^2 \alpha_i}{(\sigma_i^2 e_{\min}^2 + 2\sigma^2)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dans le cas où tous les coefficients du canal ont la même variance $\sigma_i^2 = \frac{1}{L}$, y suit une distribution χ_2 avec $2L$ degrés de liberté. Alors, l'équation (2.11) devient :

$$P_r \simeq \frac{K_{\min} L^L}{2\Gamma(L)} \exp\left(-\frac{E_b^c \mu_{eq,in}^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^\infty y^{L-1} \exp\left(-\left(\frac{e_{\min}^2}{4\sigma^2} + L\right) y\right) dy.$$

En faisant un changement de variable $t = 2\left(\frac{e_{\min}^2}{4\sigma^2} + L\right) y$, nous obtenons :

$$P_r \simeq \frac{K_{\min}}{2} \left(\frac{4\sigma^2 L}{e_{\min}^2 + 4\sigma^2 L}\right)^L \exp\left(-\frac{E_b^c \mu_{eq,in}^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.14)$$

Remarque 3 Notons qu'une approximation de la probabilité $p(y)$ a été proposée dans [18] :

$$p(y) \simeq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \frac{\left(\frac{y}{2\sigma_i^2}\right)^{\frac{1}{2\sigma_i^2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_i^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\sigma_i^2}\right)}, \quad (2.15)$$

où $\Gamma(\cdot)$ représente la fonction gamma.

En utilisant l'équation (2.11) et (2.15), nous trouvons à fort RSB :

$$P_r \simeq \frac{K_{\min}}{4} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{e_{\min}^2 y + 2E_b \mu_{eq,in}^2}{4\sigma^2}\right) \sum_{i=1}^L \frac{\left(\frac{y}{2\sigma_i^2}\right)^{\frac{1}{2\sigma_i^2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_i^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\sigma_i^2}\right)} dy. \quad (2.16)$$

Cette expression peut être évaluée numériquement pour des valeurs fixes de σ_i , pour $0 \leq i \leq L - 1$. Cependant, (2.15) est une expression approximative de $p(y)$ alors que notre méthode proposée dans l'Annexe C permet d'obtenir une expression exacte de $p(y)$. Nous vérifions dans la suite par simulations que les approximations de P_e que nous trouvons en utilisant l'expression exacte de $P(y)$ sont plus précises que (2.16).

Dans la section suivante, nous vérifions par simulations les expressions approximées des probabilités d'erreur trouvées pour le cas d'un canal fixe (équation (2.8)) et d'un canal de Rayleigh par blocs (équations (2.13), (2.14) et (2.16)).

2.5.3 Résultats des simulations

Nous proposons dans cette section de vérifier par simulations les expressions analytiques approximées de la PEB obtenues précédemment. Dans les simulations, nous ne considérons pas encore le codeur de canal et le turbo-détecteur. La longueur du canal est L . L'égaliseur est alimenté par des LRVs *a priori* artificiels sur les bits $\tilde{b}_k \in \{-1, +1\}$ qui sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne de la forme $N\left(\frac{2\tilde{b}_k \sqrt{E_b^c} \mu_{eq,in}}{\sigma^2}, \frac{4\sqrt{E_b^c} \mu_{eq,in}^2}{\sigma^2}\right)$, pour $\mu_{eq,in}$ donné. Nous considérons la modulation MDP-8 ($q = 3$) avec partitionnement du mapping (SP : Set Partitioning) (figure 2.10). Pour cette modulation, $e_{\min}^2 = (2 - \sqrt{2}) E_s$ et $K_{\min} = \frac{1}{3}$.

Les figures 2.11, 2.12 et 2.13 montrent le TEB obtenu par simulations à la sortie de l'égaliseur MAP en fonction de E_b/N_0 pour $L = 3$ respectivement à travers le canal fixe de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), le canal de Rayleigh par blocs avec $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$, $\sigma_2^2 = 0.4286$ et le canal de Rayleigh par blocs avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{L}$, pour $0 \leq i \leq L - 1$. Les figures montrent aussi les approximations des PEBs en fonction de E_b/N_0 obtenues en utilisant (2.8), (2.13) et (2.14) respectivement. Les figures 2.14 et 2.15 montrent le TEB obtenu par simulations en fonction de E_b/N_0 pour $L = 2$ respectivement à travers le canal de Rayleigh par blocs avec $\sigma_0^2 = 0.375$, $\sigma_1^2 = 0.625$ et le canal de Rayleigh par blocs avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{L}$, pour $0 \leq i \leq L - 1$. Ces figures montrent aussi les approximations des PEBs en fonction de E_b/N_0 obtenues

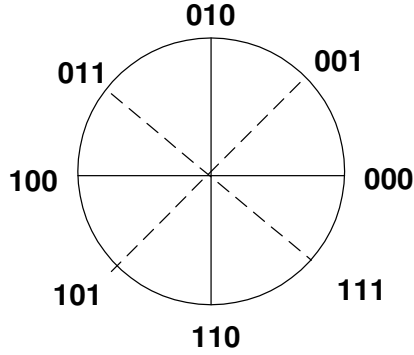


Fig. 2.10 : Constellation de la modulation MDP-8 avec un mapping SP.

en utilisant les équations (2.13) et (2.14) respectivement. Chaque courbe est obtenue pour $\mu_{eq,in}$ constant. Nous remarquons que pour les cas d'un canal fixe et d'un canal de Rayleigh par blocs avec des variances différentes, et quand les informations *a priori* sont fiables ($\mu_{eq,in} > 0.5$), les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par simulations. Pour le cas d'un canal de Rayleigh par blocs avec des variances égales, les figures 2.13 et 2.15 montrent que l'approximation est moins fiable mais reste bonne à fort rapport E_b/N_0 .

Nous proposons aussi de comparer les expressions analytiques données par (2.13), obtenue en utilisant l'expression exacte que nous avons trouvée de $p(y)$, et (2.16) obtenue en utilisant l'approximation de $p(y)$ donnée dans [18]. Nous considérons une modulation MDP-8 avec un mapping SP. Pour ce mapping $e_{min}^2 = (2 - \sqrt{2})^2$ et $K_{min} = 1/3$. La figure 2.16 montre le TEB obtenu par simulations à la sortie de l'égaliseur MAP en fonction de E_b/N_0 pour $L = 3$ à travers un canal de Rayleigh par blocs avec $\sigma_0^2 = 1/4$, $\sigma_1^2 = 1/2$, $\sigma_2^2 = 1/4$. Cette figure montre aussi les approximations des PEBs en fonction de E_b/N_0 obtenues en utilisant (2.13) et (2.16). Nous remarquons que l'approximation (2.13) obtenue en utilisant l'expression exacte de $p(y)$ est plus précise que l'approximation (2.16) utilisant l'expression approximée de $p(y)$ donnée dans [18].

Nous considérons maintenant la chaîne complète avec le codeur de canal à l'émission et le turbo-détecteur à la réception. Les bits d'information sont codés avec un code convolutif de rendement $1/2$ et de polynômes générateurs $(7, 5)$ en octal. Nous considérons la modulation MDP-8 avec un mapping SP. Nous considérons deux canaux : le canal fixe de réponse impulsionnelle $(0.5; 0.71; 0.5)$ et le canal BABG. La taille de l'entrelaceur est 16386. Dans le cas du canal BABG, la détection se réduit à une démodulation vu

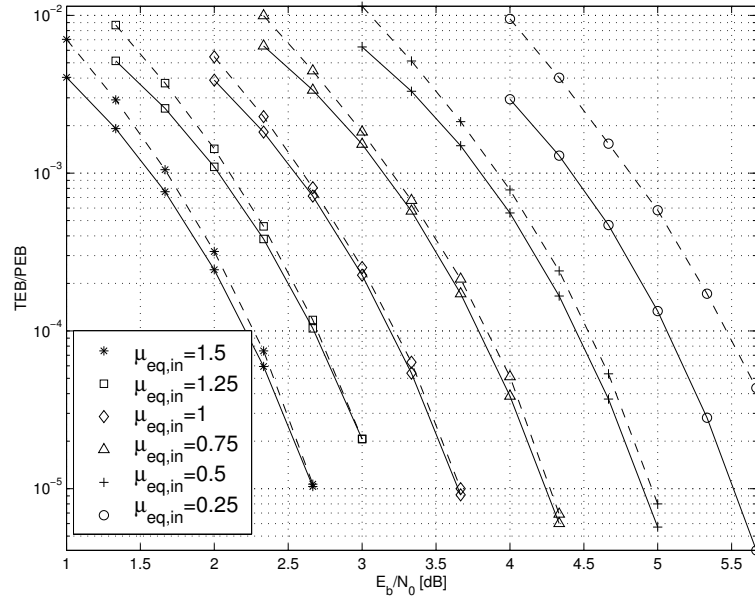


Fig. 2.11 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.8) (en traits continus) : canal fixe sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), modulation MDP-8 avec un mapping SP.

l'absence d'interférences entre symboles. La figure 2.17 montre le TEB à la sortie du décodeur dans un turbo-démodulateur dans le cas du canal BABG (courbes en traits continus) pour une à trois itérations et le TEB à la sortie d'un décodeur dans un turbo-démodulateur dans le cas du canal sélectif en fréquence (courbes en traits discontinus) pour une à cinq itérations en fonction de E_b/N_0 . Notons que le turbo-démodulateur converge au bout de 3 itérations et que le turbo-démodulateur converge au bout de 5 itérations. Nous remarquons que lorsque E_b/N_0 augmente, le TEB à la sortie du turbo-démodulateur converge vers le TEB à la sortie du turbo-démodulateur. Ceci confirme la Remarque 2 où nous montrons que les performances du turbo-démodulateur ne dépendent pas du canal.

Pour avoir de meilleures performances du turbo-démodulateur, nous devons bien choisir le mapping. En nous basant sur les approximations analytiques de la PEB à la sortie du détecteur trouvées dans cette section, nous proposons dans la section suivante d'optimiser le choix du mapping.

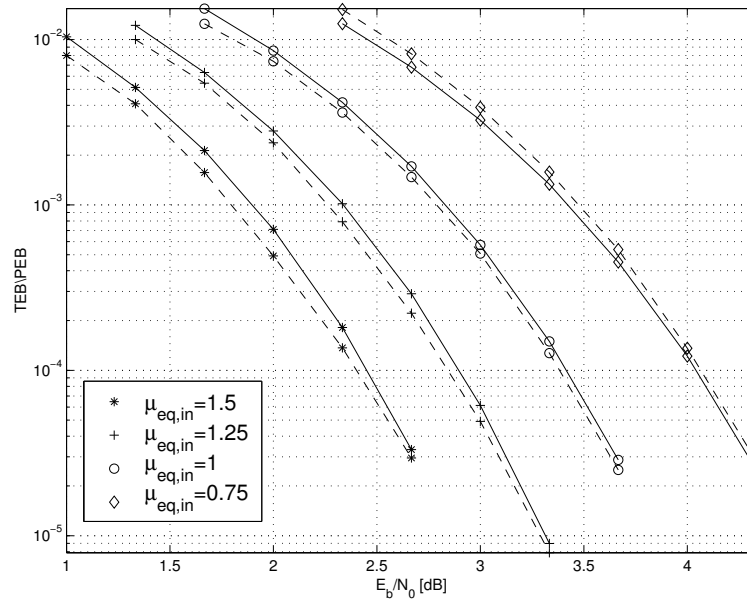


Fig. 2.12 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.13) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$, $\sigma_2^2 = 0.4286$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.

2.6 Optimisation du mapping

Nous proposons maintenant d'optimiser le mapping quand un turbo-détecteur est utilisé et les informations *a priori* sont fiables. Nous considérons les canaux fixes et les canaux de Rayleigh par blocs. Notre but est de trouver le mapping qui minimise les expressions approximées des PEBs trouvées dans la section 2.5. Dans la minimisation, nous ne tenons pas compte de la dépendance de $\mu_{eq,in}$ du mapping.

2.6.1 Mappings optimisés

A partir des équations (2.8), (2.13) et (2.14), nous déduisons que le mapping optimisé est le mapping donnant la plus grande valeur de e_{\min} et la plus petite valeur correspondante de K_{\min} . Dans le cas de la modulation MDP-8, nous pouvons facilement montrer que le mapping optimisé est celui de la figure 2.18a puisqu'il correspond à la plus grande valeur de e_{\min} égale à $\sqrt{2}$ et la plus petite valeur correspondante de K_{\min} égale à $\frac{1}{3}$. Nous remarquons que ce mapping est le même que celui proposé dans [41] obtenu dans le cas

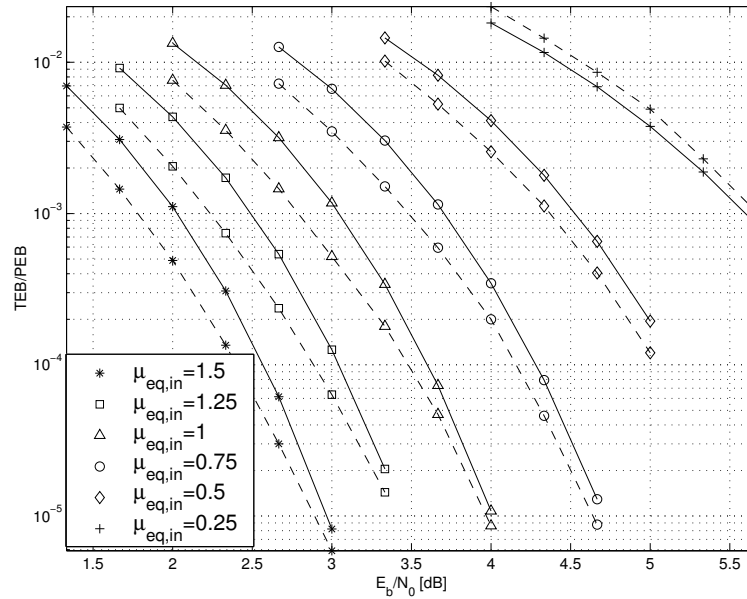


Fig. 2.13 : Comparaison des courbes de TEI à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.14) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.

d'une transmission sur un canal non sélectif en fréquence (BABG ou Rayleigh) quand un récepteur itératif est utilisé.

La recherche du mapping optimisé peut être faite par une recherche exhaustive. Cependant, la complexité augmente considérablement avec q vu qu'il y'a $2^q!$ constellations possibles. Ainsi, lorsque $q > 3$, nous proposons d'utiliser l'algorithme BSA [53] et de l'adapter à notre cas. Cet algorithme conduit à un optimum local. L'idée de cet algorithme est d'échanger itérativement les positions des symboles en partant d'un mapping initial. L'exécution plusieurs fois de l'algorithme BSA en considérant différents mappings initiaux choisis aléatoirement permet de converger vers l'optimum global [41].

Le BSA commence par un mapping initial. Il génère une liste des symboles classés dans un ordre croissant de $\|\underline{e}\|$. Nous considérons uniquement les vecteurs d'erreurs \underline{e} correspondant à un symbole erroné avec un bit erroné. Le principe est d'échanger la position du premier symbole dans la liste (menant à la plus petite valeur e_{\min} de $\|\underline{e}\|$) avec une position d'un autre symbole en considérant tous les symboles possibles. Le symbole sélectionné est le symbole qui après l'échange réalise la plus grande augmentation possible de e_{\min} , après avoir effectué tous les échanges possibles. Si plusieurs mappings avec la même valeur de e_{\min} sont trouvés, celui qui correspond à la plus petite valeur de K_{\min}

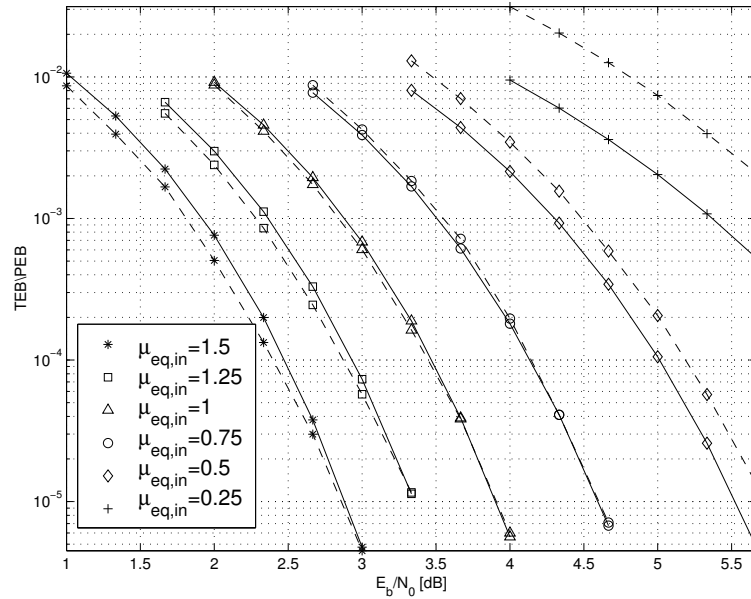


Fig. 2.14 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.13) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec $\sigma_0^2 = 0.375$, $\sigma_1^2 = 0.625$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.

est sélectionné. Si aucun échange ne mène à une augmentation de la valeur de e_{\min} , le deuxième symbole dans la liste est sélectionné pour l'échange. Ce processus continue pour les symboles de la liste jusqu'à trouver un symbole qui donne un échange augmentant la valeur de e_{\min} . Une fois l'échange est accepté, une nouvelle liste ordonnée de symboles est générée et l'algorithme continue comme décrit auparavant, jusqu'à ce qu'aucune autre augmentation de e_{\min} est possible. Le mapping optimisé pour une modulation MAQ-16 est donné dans la figure 2.18b.

Dans la section suivante, nous proposons de comparer par simulations les performances du turbo-détecteur quand le mapping utilisé est le mapping de Gray ou le mapping optimisé.

2.6.2 Résultats des simulations

Nous considérons le turbo-détecteur à la réception. Nous utilisons un codeur convolutif de rendement 1/2 et de polynômes générateurs (7, 5) en octal et un entrelaceur binaire aléatoire. Nous considérons les modulations MDP-8 et MAQ-16. La longueur de l'entre-

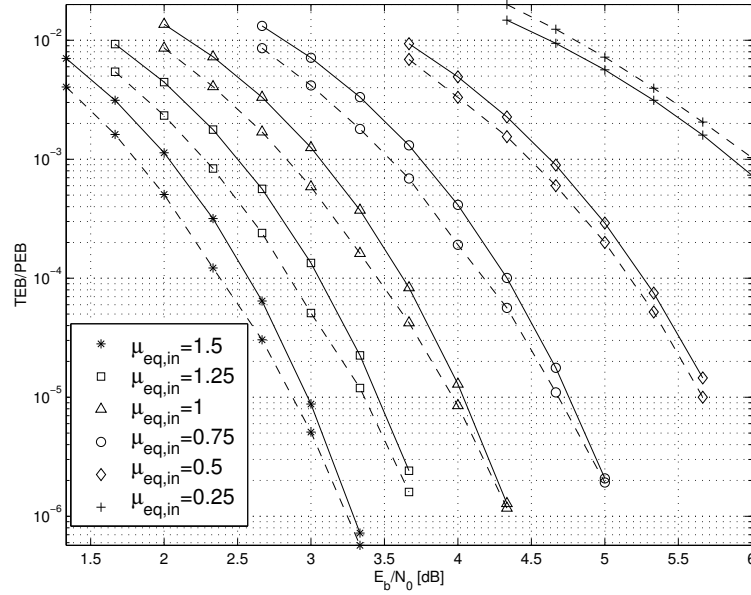


Fig. 2.15 : Comparaison des courbes de TEb à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et de celles basées sur (2.14) (en traits continus) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{2}$, pour $0 \leq i \leq 1$, modulation MDP-8 avec un mapping SP.

laceur est 16386 pour la modulation MDP-8 et 16400 pour la modulation MAQ-16. La longueur du canal est $L = 3$.

Afin de choisir le nombre G de blocs, nous représentons sur la figure 2.19 la valeur moyenne de $\mu_{eq,in}$ en fonction de G pour un canal de Rayleigh par blocs à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur et pour $E_b/N_0 = 5dB$. Cette figure montre qu'à partir de $G = 5$, la valeur moyenne de $\mu_{eq,in}$ converge vers une valeur fixe et par suite $\mu_{eq,in}$ ne dépend pas de la réalisation du canal sur un bloc. Nous supposons ainsi que les blocs sont organisés en groupes de $G = 5$ blocs dans le reste de ce chapitre.

Les figures 2.20, 2.21 et 2.22 montrent le TEb à la sortie du turbo-détecteur, pour une modulation MDP-8 et à différentes itérations en fonction de E_b/N_0 , respectivement à travers le canal fixe de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), le canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances différentes $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$, $\sigma_2^2 = 0.4286$ et le canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales pour tous les coefficients du canal. Les figures 2.23 et 2.24 montrent le TEb à la sortie du turbo-détecteur pour une modulation MAQ-16 et à différentes itérations en fonction de E_b/N_0 , respectivement à travers le canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances différentes $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$, $\sigma_2^2 = 0.4286$ et le

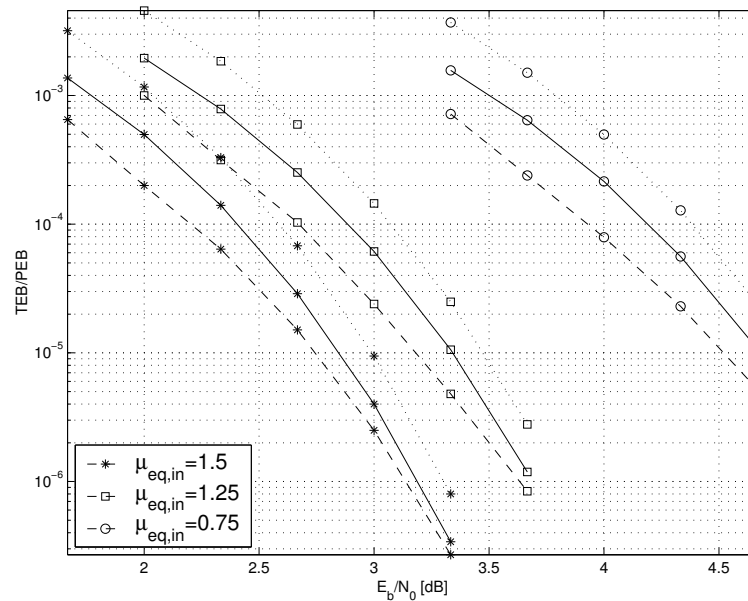


Fig. 2.16 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus), de celles basées sur (2.13) que nous proposons (en traits continus) et celles basées sur (2.16) utilisant [18] (en pointillés) : canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec $\sigma_0^2 = 1/4$, $\sigma_1^2 = 1/2$, $\sigma_2^2 = 1/4$, une modulation MDP-8 avec un mapping SP.

canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales pour tous les coefficients du canal. Dans ces figures, les courbes obtenues en utilisant le mapping de Gray sont représentées en traits continus et celles obtenues en utilisant le mapping optimisé sont représentées en pointillés. Ces figures montrent qu'à fort E_b/N_0 , le TEB obtenu pour le mapping optimisé est bien meilleur que le TEB obtenu pour le mapping de Gray. Ceci n'est pas le cas à faible E_b/N_0 puisque notre étude suppose que le E_b/N_0 est assez élevé.

En nous basant sur ces résultats, nous proposons dans la section qui suit d'utiliser pour un E_b/N_0 donné le mapping qui donne le meilleur TEB (entre le mapping optimisé et le mapping de Gray). Nous appellerons cette technique mapping adaptatif par analogie avec la modulation adaptative.

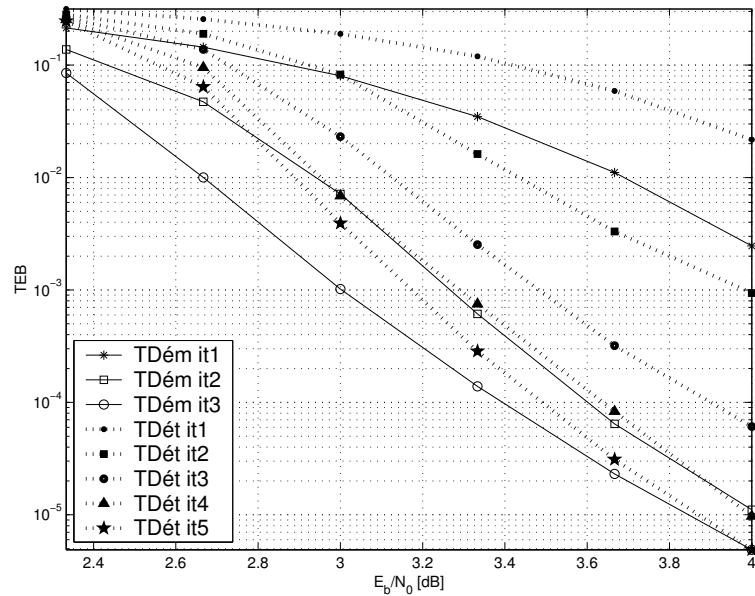


Fig. 2.17 : TEB en fonction de E_b/N_0 à la sortie du décodeur pour une modulation MDP-8 avec un mapping SP et un canal fixe sélectif en fréquence : comparaison du TEB obtenu par simulations du turbo-démodulateur (courbes en traits continus) et du turbo-détecteur (courbes en traits discontinus).

2.7 Mapping adaptatif

2.7.1 Principe du mapping adaptatif

La modulation adaptative est une technique utilisée dans les réseaux sans fil pour adapter la modulation utilisée à la qualité de la transmission. Par analogie avec la modulation adaptative et dans le but d'améliorer les performances du turbo-détecteur, nous proposons d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission. Nous considérons uniquement deux mappings : le mapping de Gray et le mapping optimisé donné par notre étude. Nous considérons deux cas : le cas du canal fixe et le cas du canal de Rayleigh par blocs.

Cas d'un canal fixe

Dans le cas d'un canal fixe, le rapport signal à bruit de la transmission est égal à E_b/N_0 . Il est constant au cours de la transmission. Nous définissons le *RSBseuil*

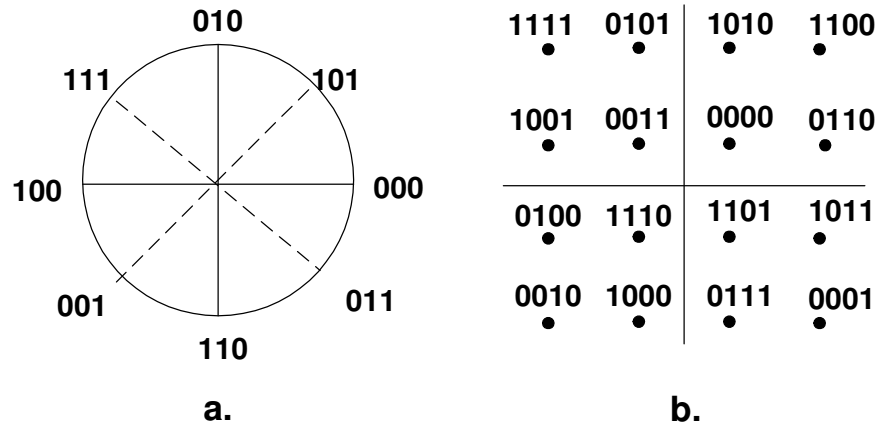


Fig. 2.18 : Constellation du mapping a. MDP-8 optimisé et b. MAQ-16 optimisé

comme étant le E_b/N_0 du point d'intersection entre les courbes obtenues en utilisant le mapping de Gray et le mapping optimisé à la convergence du turbo-détecteur. Notons que l'itération de convergence correspond à l'itération durant laquelle le turbo-détecteur converge vers les meilleures performances pour le mapping étudié et ces performances ne seront pas améliorées aux prochaines itérations. Par exemple dans les conditions de la figure 2.20, le RSB_{seuil} est égal à 4.44 dB. L'adaptation du mapping est effectuée comme suit. Nous comparons le E_b/N_0 de la transmission au RSB_{seuil} . S'il est inférieur au RSB_{seuil} nous considérons le mapping de Gray et s'il est supérieur au RSB_{seuil} nous considérons le mapping optimisé.

Cas d'un canal de Rayleigh par blocs

Dans le cas d'un canal de Rayleigh par blocs, le RSB varie d'un bloc à un autre. Le rapport signal à bruit sur chaque bloc est $\sum_{i=0}^{L-1} |h_i|^2 E_b/N_0$. Nous supposons que l'énergie du canal sur chaque bloc est connue au niveau de l'émetteur. Pour chaque bloc, nous comparons le RSB de la transmission au RSB_{seuil} défini comme étant le E_b/N_0 du point d'intersection des courbes de TEB obtenues à la convergence pour les deux mappings considérés. Par exemple, pour la figure 2.23, le RSB_{seuil} est 4dB. Comme dans le cas du canal fixe, le mapping de Gray est utilisé si le rapport signal à bruit du bloc de taille N est inférieur à la valeur du RSB_{seuil} et le mapping optimisé est utilisé sinon.

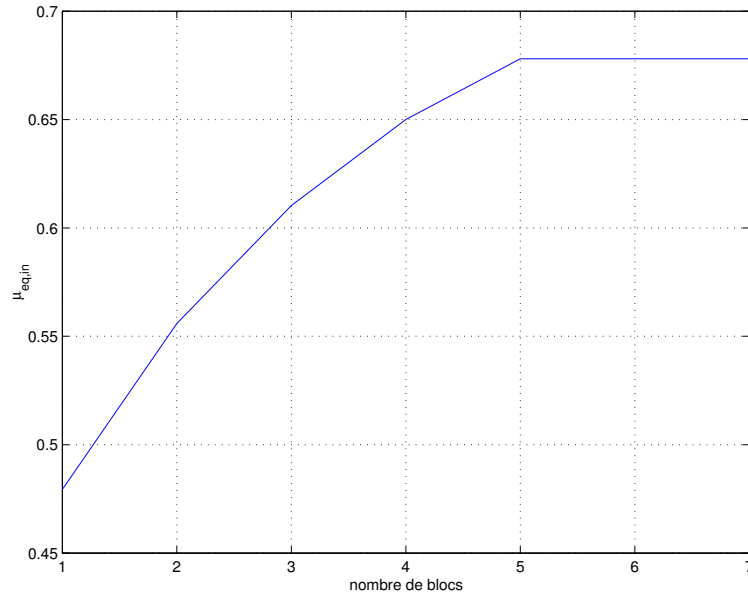


Fig. 2.19 : valeur moyenne de $\mu_{eq,in}$ en fonction du nombre G de blocs.

Dans la section qui suit, nous proposons d'illustrer par des simulations les performances obtenues en utilisant le mapping adaptatif.

2.7.2 Résultats des simulations

Dans les simulations, les blocs de données sont organisés en groupes de $G = 5$ blocs et sont codés avec un codeur convolutif de rendement $1/2$ et de polynômes générateurs $(7, 5)$ en octal. L'entrelaceur est choisi aléatoirement. Nous considérons deux types de canaux sélectifs en fréquence : les canaux fixes et les canaux de Rayleigh par blocs. Nous utilisons les modulations MDP-8 et MAQ-16. La longueur de l'entrelaceur est 16386 pour la modulation MDP-8 et 16400 pour la modulation MAQ-16.

Les figures 2.25, 2.26 et 2.27 montrent le TEB à la sortie du turbo-détecteur pour $L = 3$ respectivement à travers le canal fixe de réponse impulsionnelle $(0.5; 0.71; 0.5)$, le canal de Rayleigh par blocs avec $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$, $\sigma_2^2 = 0.4286$ et le canal de Rayleigh par blocs avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{L}$, pour $0 \leq i \leq L-1$ quand le mapping de Gray est utilisé (courbes en traits continus) et quand le mapping optimisé est utilisé (courbes en pointillés) en fonction de E_b/N_0 . Nous représentons aussi sur ces figures les courbes obtenues en utilisant le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge). Toutes les courbes sont obtenues à la convergence du turbo-détecteur. Ces figures montrent que

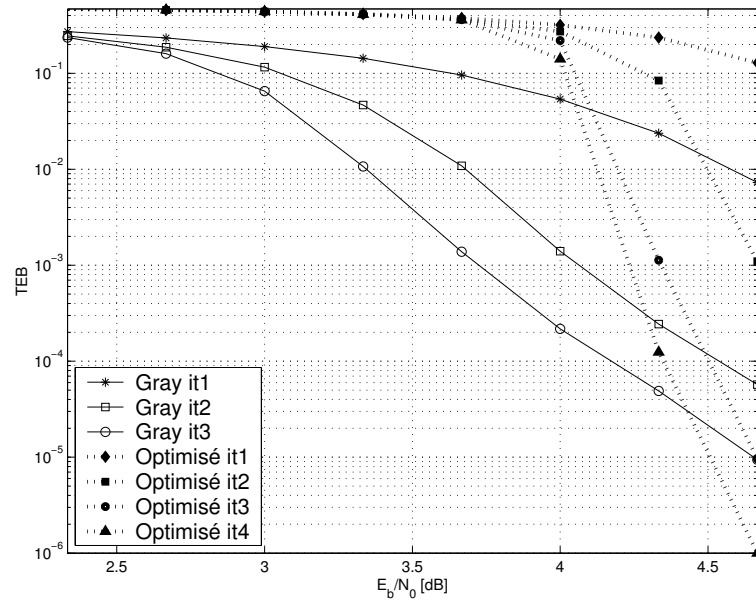


Fig. 2.20 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).

dans le cas du canal de Rayleigh : pour $E_b/N_0 < RSBseuil$ nous avons à peu près les performances du mapping de Gray et pour $E_b/N_0 > RSBseuil$ nous avons à peu près les performances du mapping optimal.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un schéma BICM à travers un canal sélectif en fréquence. Nous avons utilisé au niveau du récepteur un turbo-détecteur formé par un égaliseur et un décodeur basés sur le critère MAP. Nous avons étudié les distributions des LRVs, sur un canal BABG non sélectif en fréquence, à la sortie d'un démodulateur dans le cas d'une transmission non codée et sans informations *a priori* puis à la sortie du démodulateur et du décodeur (dans un turbo-démodulateur) dans le cas d'une transmission codée. Nous avons montré qu'elles peuvent être approximées par des gaussiennes. Nous avons donc analysé les performances de l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* provenant du décodeur MAP modélisées par des variables gaussiennes. Nous avons donné des approximations asymptotiques de la probabilité d'erreur binaire à la

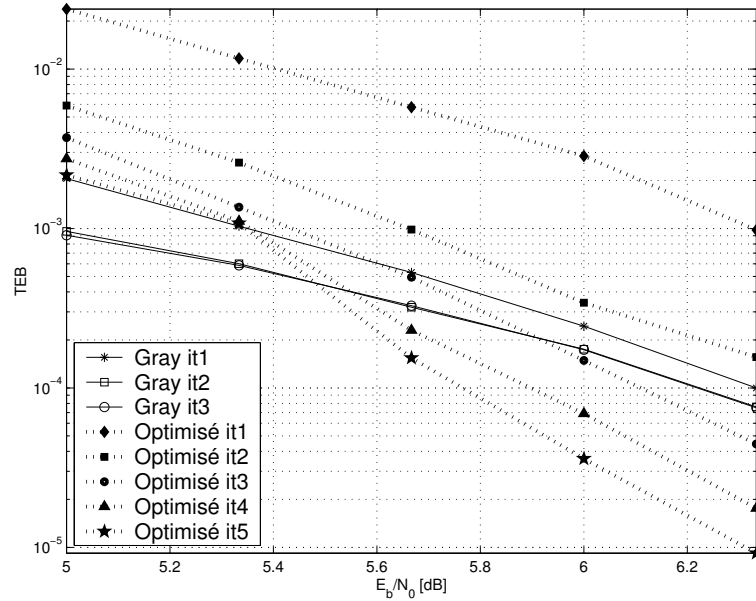


Fig. 2.21 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$ et $\sigma_2^2 = 0.4286$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).

sortie de l'égaliseur MAP quand les informations *a priori* sont fiables dans le cas d'un canal fixe et dans le cas d'un canal de Rayleigh par blocs. Les simulations ont montré que ces expressions analytiques donnent une bonne approximation des performances de l'égaliseur particulièrement à fort E_b/N_0 . Ensuite, nous avons proposé de trouver le mapping minimisant les expressions analytiques trouvées. Les simulations ont montré que les performances obtenues pour le mapping optimisé sont meilleures que celles obtenues pour le mapping de Gray, à fort E_b/N_0 . En tenant compte de ces résultats, nous avons proposé d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission.

Dans ce chapitre, nous avons supposé que le canal est parfaitement connu au niveau du récepteur. En pratique, le canal n'est pas connu et doit être estimé. Dans le chapitre suivant, nous allons étendre l'étude au cas où le canal est estimé.

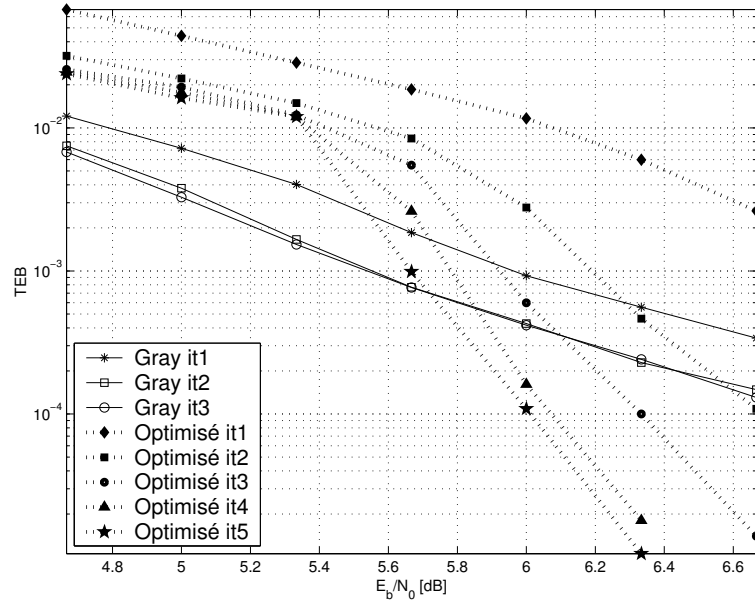


Fig. 2.22 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-décodeur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).

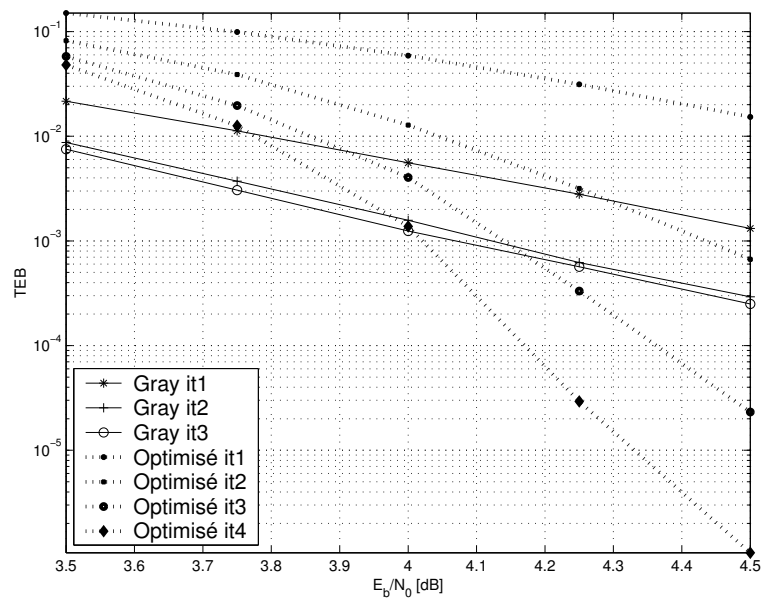


Fig. 2.23 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-décodeur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$ et $\sigma_2^2 = 0.4286$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).

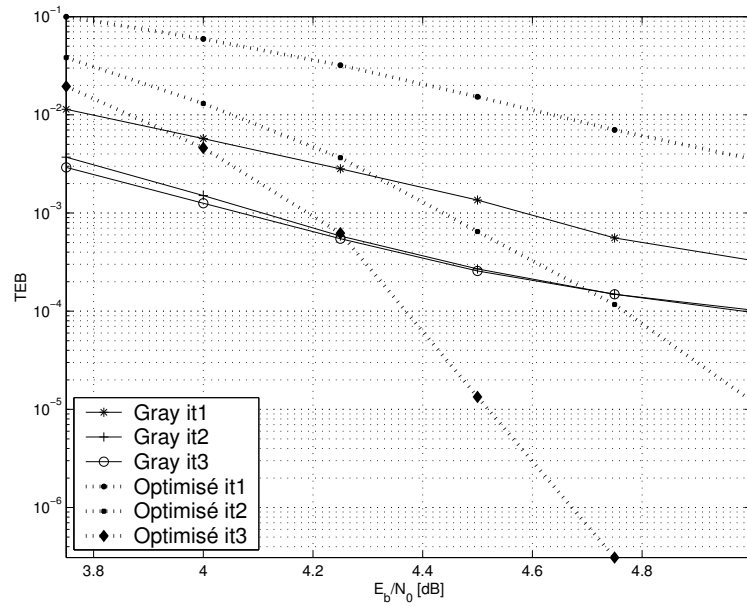


Fig. 2.24 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).

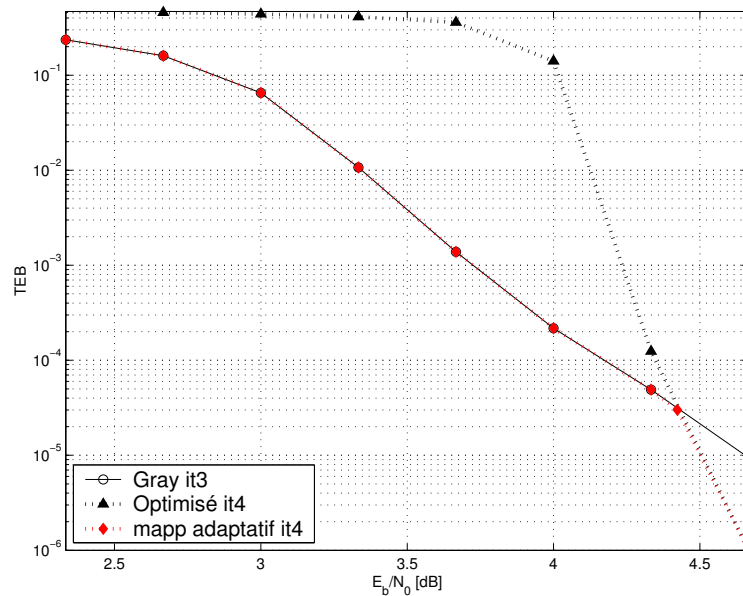


Fig. 2.25 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).

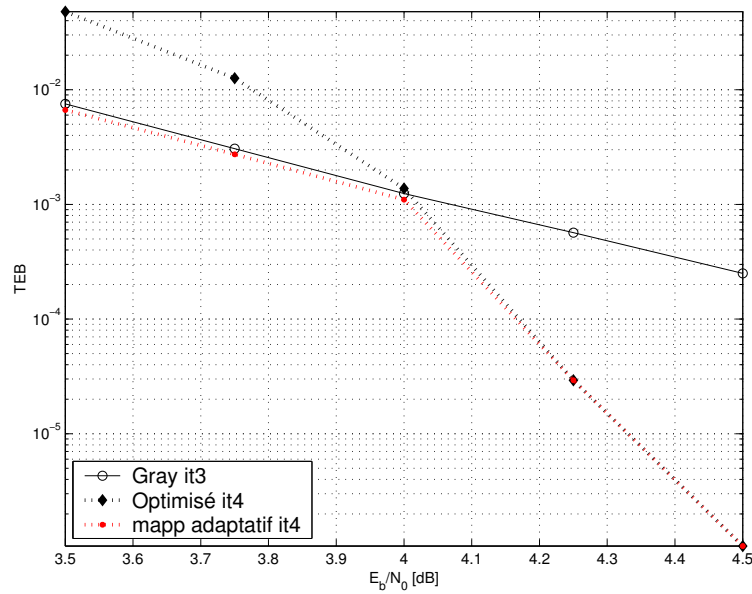


Fig. 2.26 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-décodeur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances $\sigma_0^2 = 0.2143$, $\sigma_1^2 = 0.3571$ et $\sigma_2^2 = 0.4286$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).

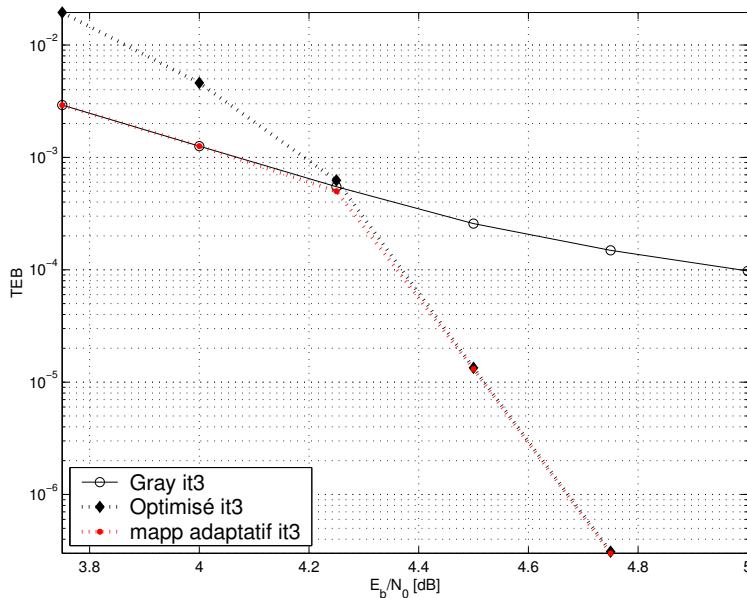


Fig. 2.27 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-décodeur à travers un canal de Rayleigh par blocs sélectif en fréquence avec des variances égales $\sigma_i^2 = \frac{1}{3}$, pour $0 \leq i \leq 2$, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).

Chapitre 3

Optimisation du mapping pour un turbo-décodeur MAP avec estimation de canal

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré un schéma BICM (Bit Interleaved Coded Modulation) à travers un canal sélectif en fréquence. Nous avons considéré un turbo-décodeur composé d'un égaliseur Maximum *A Posteriori* (MAP) et d'un décodeur MAP. Notre but était d'optimiser le mapping utilisé. Pour ce faire, nous avons calculé des expressions analytiques approximées de la Probabilité d'Erreur Binaire (PEB) à la sortie de l'égaliseur MAP. Nous avons supposé que le canal est parfaitement connu au niveau du récepteur. En pratique, le canal est inconnu au niveau du récepteur et doit être estimé. Ainsi, dans ce chapitre, nous étendons notre étude au cas des canaux estimés.

Nous nous intéressons au problème du choix du mapping en tenant compte de l'utilisation du turbo-décodeur et de l'estimation du canal. A notre connaissance, aucun travail dans la littérature ne s'est intéressé à ce problème. Cependant, plusieurs travaux se sont intéressés à l'estimation du canal et son effet sur les performances de l'égaliseur. Par exemple dans [20], Gorokhov a étudié l'impact de l'erreur d'estimation du canal sur les performances de l'égaliseur Maximum de Vraisemblance (MV) utilisant l'algorithme de Viterbi. Il a montré que c'est équivalent à une perte au niveau du Rapport Signal à Bruit (RSB) et il a évalué cette perte. De plus, dans [46] les auteurs ont étudié analytiquement l'impact des informations *a priori* fournies par le décodeur et de l'estimation du canal

sur les performances de l'égaliseur MAP pour le cas d'une Modulation à Déplacement de Phase d'ordre 2 (MDP-2). Dans ce chapitre, nous proposons de généraliser l'étude de [46] aux modulations d'ordres élevés. Nous nous intéressons ensuite au problème du choix du mapping en tenant compte de l'utilisation du turbo-détecteur et de l'estimation du canal. Pour mener notre étude, nous proposons de calculer des approximations analytiques de la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur MAP alimenté par les informations *a priori* fournies par le décodeur à fort RSB dans le cas d'un canal fixe estimé. Nous utilisons ensuite l'algorithme Binary Switching Algorithm (BSA) [53] pour trouver le mapping qui minimise les approximations analytiques des probabilités d'erreur à la sortie de l'égaliseur. Nous montrons que cet algorithme est différent de celui utilisé dans le cas d'un canal connu. Nous étudions aussi le mapping adaptatif dans un contexte de canal estimé. Nous considérons dans ce chapitre uniquement les canaux fixes vu la difficulté de calculer une approximation analytique de la PEB lorsque le canal varie d'un bloc à un autre.

Tout d'abord, nous allons modéliser notre système de transmission et présenter le turbo-détecteur MAP avec estimation de canal. Puis, nous donnerons une analyse des performances de l'égaliseur MAP dans ce turbo-détecteur. Nous calculerons alors une approximation analytique de la PEB à la sortie de l'égaliseur MAP lorsqu'il est alimenté par les informations *a priori* provenant du décodeur et l'estimation du canal. A partir de cette expression, nous développerons une approximation de la PEB lorsque les informations *a priori* sont fiables et nous optimiserons le choix du mapping pour améliorer les performances du turbo-détecteur à fort Rapport Signal à Bruit (RSB). Nous remarquons que chaque mapping ne peut pas être le meilleur pour tous les RSBs. Nous proposons alors d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission.

3.2 Modélisation du système

Nous considérons à l'émission une modulation codée à entrelacement aléatoire de bits (BICM), à travers un canal sélectif en fréquence. Nous supposons que la transmission se fait par blocs de N symboles, que le canal est invariant durant la transmission de tous les blocs et qu'il est normalisé $\|\underline{h}\|^2 = \sum_{i=0}^{L-1} |h_i|^2 = 1$. La séquence d'information binaire d'entrée est codée avec un codeur convolutif non récursif et non systématique, de rendement R_c . Chaque séquence codée est entrelacée puis modulée selon l'alphabet Ω de taille 2^q , où $q \geq 1$ est le nombre de bits par symbole. Après échantillonnage au rythme

symbole, le signal reçu à un instant k est donné par :

$$x_k = \sum_{i=0}^{L-1} h_i s_{k-i} + n_k, \quad 1-L \leq k \leq N-1,$$

où s_k , pour $0 \leq k \leq N-1$, sont les symboles transmis avec une énergie moyenne E_s et, pour $1-L \leq k \leq -1$, des symboles virtuels connus du récepteur et pouvant être pris égaux à zéro, n_k sont des échantillons indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) d'une variable aléatoire complexe de densité de probabilités (ddp) de la forme $N_C(0, \sigma^2)$. La mémoire du canal est $L-1$ ($L \geq 1$). Le terme h_i , pour $0 \leq i \leq L-1$, représente le $i^{\text{ème}}$ coefficient complexe du canal.

Nous considérons les MDPs et les Modulations d'Amplitude en Quadrature (MAQ). Au niveau du récepteur, le canal est estimé en utilisant une séquence d'apprentissage de longueur T_0 ($T_0 \geq L$). Soient $\tilde{\mathbf{s}} = (s_{T_0-1}, \dots, s_0)^T$ le vecteur des symboles d'apprentissage et $\underline{\underline{H}}_L$ la matrice de Hankel de dimension $T_0 \times L$ ayant comme première colonne $(s_{T_0-1}, \dots, s_0)^T$ et comme dernière ligne (s_0, \dots, s_{1-L}) . Nous notons par $\tilde{\mathbf{x}} = (x_{T_0-1}, \dots, x_0)^T$ la sortie du canal correspondant à la séquence d'apprentissage, par $E_b = \frac{E_s}{q}$ l'énergie moyenne reçue par bit d'information et par $E_b^c = R_c E_b$ l'énergie binaire moyenne des bits codés. L'estimation aux moindres carrés du canal, $\hat{\underline{h}} = (\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{L-1})^T$, est donnée par [46] :

$$\hat{\underline{h}} = \left(\underline{\underline{H}}_L^H \underline{\underline{H}}_L \right)^{-1} \underline{\underline{H}}_L^H \tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.1)$$

En notant $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{L-1})^T$ le vecteur des coefficients du canal, nous obtenons :

$$\hat{\underline{h}} - \underline{h} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 \underline{\underline{C}}^{-1}).$$

où $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{H}}_L^H \underline{\underline{H}}_L$.

Nous présentons dans la section suivante le turbo-détecteur basé sur le critère MAP que nous utilisons dans la suite du chapitre.

3.3 Structure du turbo-détecteur MAP avec estimation de canal

Le récepteur est un turbo-détecteur formé par un égaliseur MAP et un décodeur MAP qui échangent des LRVs extrinsèques sur les bits codés au cours des itérations, suivant l'idée des turbo-codes [4, 38] (figure 3.1). Puisque le canal est inconnu au niveau du récepteur, l'égaliseur MAP utilise à chaque itération du turbo-détecteur l'estimation \hat{h} de canal calculée en utilisant la séquence d'apprentissage en plus des observations du canal et des LRVs *a priori* fournis par le décodeur [42].

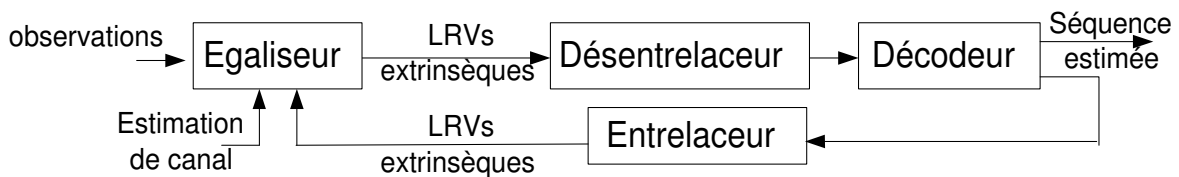


Fig. 3.1 : Structure du turbo-détecteur avec estimation de canal.

Dans [46], les auteurs ont étudié analytiquement l'impact des informations *a priori* fournies par le décodeur et de l'erreur d'estimation du canal sur les performances de l'égaliseur MAP. L'étude a été faite en considérant la modulation MDP-2. Dans le chapitre précédent, nous avons fait l'étude pour le cas des modulations d'ordres élevés et des canaux connus. Nous proposons, dans la suite de ce chapitre, de généraliser cette étude au cas des modulations d'ordres élevés et des canaux estimés. Nous considérons deux types de modulations : les modulations MDP et les modulations MAQ.

3.4 Analyse des performances de l'égaliseur MAP dans le turbo-détecteur pour un canal estimé

Nous présentons, dans cette section, une analyse des performances de l'égaliseur MAP alimenté par les LRVs *a priori* calculés par le décodeur et par l'estimation du canal. Nous supposons, comme dans le cas du canal connu, que les LRVs *a priori* fournis par le décodeur sur les bits codés b_k pour $0 \leq k \leq qN - 1$ peuvent être approximés par des

variables aléatoires i.i.d. avec une ddp de la forme $N\left(\frac{2\tilde{b}_k\sqrt{E_b^c}}{\sigma_{eq,in}^2}, \frac{4\sqrt{E_b^c}}{\sigma_{eq,in}^2}\right)$ avec $\tilde{b}_k = 2b_k - 1$. Cette hypothèse sera validée par simulations dans la section 3.4.3. Comme dans le chapitre 2, l'analyse des performances sera faite pour l'égaliseur utilisant le critère MAP séquence.

Nous commençons par donner une approximation analytique de la PEB à la sortie de l'égaliseur utilisant les LRVs *a priori* provenant du décodeur et l'estimation du canal. Ensuite, nous donnons une approximation de la PEB quand les LRVs *a priori* sont fiables (à fort RSB). Enfin, nous vérifions par simulations l'approximation gaussienne des distributions des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur et du décodeur.

3.4.1 Approximation de la probabilité d'erreur

Nous posons dans la suite $\mu_{eq,in} \triangleq \frac{\sigma}{\sigma_{eq,in}}$. Soit $\zeta_k = (s_{k-1}, \dots, s_{k-L+1})$ un état du treillis de l'égaliseur MAP à l'instant k [3, 16]. Comme dans le chapitre 2, nous disons qu'un événement d'erreur s'étend de l'instant k_1 à l'instant k_2 , si les états estimés et les états corrects sont égaux aux instants k_1 et k_2 et sont différents pour $k_1 < k < k_2$. Soient \underline{e}_b le vecteur d'erreur binaire et \underline{e} le vecteur d'erreur symbole correspondant à un événement d'erreur donné. Nous posons $A(\underline{e}_b, \underline{e})$ l'événement que la séquence transmise \underline{b}_e des bits de données codés soit compatible avec l'occurrence de \underline{e}_b et \underline{e} ($\underline{b}_e + \underline{e}_b$ est une séquence codée). Nous avons montré dans la section 2.5.1 que la probabilité de $(\underline{e}_b, \underline{e})$ est majorée par :

$$P(\underline{e}_b, \underline{e}) \leq P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) P_{\underline{b}_e, \hat{\underline{b}}_e},$$

où $P_{\underline{b}_e, \hat{\underline{b}}_e}$ représente la probabilité que le vecteur erroné des bits estimés $\hat{\underline{b}}_e = \underline{b}_e + \underline{e}_b$ ait une meilleure métrique que le vecteur \underline{b}_e . Cette probabilité d'erreur par paire est la probabilité que l'égaliseur, utilisant le critère MAP séquence et ayant des informations *a priori* à son entrée, choisisse $\hat{\underline{b}}_e$ au lieu de \underline{b}_e . Elle est indépendante de \underline{b}_e , dépend uniquement de \underline{e} et \underline{e}_b lorsque l'événement $A(\underline{e}_b, \underline{e})$ est vérifié, et elle est donnée par (voir Annexe D) :

$$P_{\underline{b}_e, \hat{\underline{b}}_e} \simeq Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)E_b^c\mu_{eq,in}^2} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2m(\underline{e}_b)E_b^c\mu_{eq,in}^2}{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2}\right)L\lambda}\right)^{-1/2}\right).$$

où $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$, $\underline{d}(\underline{e})$ est le produit de convolution de \underline{e} avec la réponse impulsionnelle du canal, $m(\underline{e}_b)$ est le nombre de décisions erronées sur les bits et λ est la valeur propre maximale de la matrice $\underline{\underline{C}}^{-1}$. Ainsi :

$$P_e \leq \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi} m(\underline{e}_b) P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq, in}^2} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq, in}^2}{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2}\right)} L\lambda\right)^{-1/2}\right),$$

où ξ représente l'ensemble de tous les couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ correspondant à l'ensemble des événements d'erreurs potentiels.

Soit ξ_{\min} le sous-ensemble de ξ contenant tous les couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ qui donnent la valeur minimale :

$$\beta_{\min} = \min_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi_{\min}} \left[\left(\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq, in}^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2m(\underline{e}_b)E_b^c \mu_{eq, in}^2}{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2} \right)} L\lambda \right)^{-1} \right]. \quad (3.2)$$

Puisque la fonction $Q(\cdot)$ décroît exponentiellement, nous pouvons approximer la PEB, à fort RSB, par :

$$P_e \simeq \frac{1}{q} \left(\sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \xi_{\min}} m(\underline{e}_b) P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) \right) Q\left(\sqrt{\frac{\beta_{\min}}{2\sigma^2}}\right). \quad (3.3)$$

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.5.1, la difficulté dans le calcul de (3.3) réside dans la détermination des couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ qui donnent la valeur minimale β_{\min} sans aucune hypothèse sur la taille des événements d'erreurs. Ainsi, nous proposons de faire l'étude dans le cas particulier où les informations *a priori* provenant du décodeur sont fiables (à fort RSB). Dans ce cas, comme nous le montrerons dans la suite, les erreurs isolées sont majoritaires et nous pouvons donc considérer uniquement les événements d'erreurs contenant un seul bit erroné.

3.4.2 Cas des informations *a priori* fiables

Le tableau 3.1 montre les probabilités d'occurrence des erreurs isolées, des erreurs doubles et des erreurs multiples (nombre d'erreurs supérieur à 2) par événement d'erreur obtenues par simulations pour différents nombres d'itérations du récepteur itératif, E_b/N_0 , canaux de transmission, codeurs et différentes tailles de la séquence d'apprentissage. Toutes les simulations sont faites pour une modulation MDP-8 avec un mapping de Gray.

TABLEAU 3.1: Probabilités d'occurrence des erreurs binaires pour un canal estimé et différentes conditions de simulations

Conditions / Probabilités d'erreur	P_e isolées	P_e doubles	P_e multiples
Polynômes générateurs= $(7, 5)_{octal}$, $E_b/N_0 = 5$ dB Canal= $(0.5; 0.71; 0.5)$, $T_0 = 2$ et 1 ^{ère} itération	0.6	0.24	0.16
Polynômes générateurs= $(7, 5)_{octal}$, $E_b/N_0 = 5$ dB Canal= $(0.5; 0.71; 0.5)$, $T_0 = 2$ et 3 ^{ème} itération	0.68	0.192	0.128
Polynômes générateurs= $(7, 5)_{octal}$, $E_b/N_0 = 5$ dB Canal= $(0.5; 0.71; 0.5)$, $T_0 = 8$ et 3 ^{ème} itération	0.708	0.182	0.11
Polynômes générateurs= $(7, 5)_{octal}$, $E_b/N_0 = 3$ dB Canal= $(0.5; 0.71; 0.5)$, $T_0 = 2$ et 3 ^{ème} itération	0.33	0.3475	0.3225
Polynômes générateurs= $(7, 5)_{octal}$, $E_b/N_0 = 7$ dB Canal= $(0.5; 0.71; 0.5)$, $T_0 = 2$ et 3 ^{ème} itération	0.75	0.12	0.13
Polynômes générateurs= $(7, 5)_{octal}$, $E_b/N_0 = 5$ dB Canal= $(0.11; 0.99)$, $T_0 = 2$ et 3 ^{ème} itération	0.799	0.111	0.09
Polynômes générateurs= $(17, 15)_{octal}$, $E_b/N_0 = 5$ dB Canal= $(0.5; 0.71; 0.5)$, $T_0 = 2$ et 3 ^{ème} itération	0.85	0.14	0.01

D'après le tableau 3.1 et comme montré dans la section 2.5.1, la probabilité d'occurrence des erreurs isolées augmente avec l'augmentation du nombre d'itérations du turbo-détecteur, l'augmentation de E_b/N_0 de la transmission, l'augmentation de la distance minimale (canal peu sévère) et quand le code est plus performant. Nous remarquons aussi que la probabilité d'occurrence des erreurs isolées augmente lorsque T_0 augmente (amélioration de la qualité d'estimation du canal).

En effet, quand le code est performant, E_b/N_0 est élevé, le canal est peu sévère, le nombre d'itérations du turbo-détecteur augmente et la qualité d'estimation \hat{h} du canal est bonne, la majorité des informations *a priori* sont fiables et ont donc plus d'influence sur la détection de l'égaliseur que les observations du canal [35, 43]. Vu l'indépendance des LRVs *a priori*, la plupart des erreurs sont isolées. Ainsi, nous considérons uniquement

les erreurs isolées et nous supposons que $m(\underline{e}_b) = 1$ et $\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 = \|\underline{e}\|^2$. L'équation (3.3) devient donc :

$$P_e \simeq \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \tilde{\xi}_{\min}} P(A(\underline{e}_b, \underline{e})) Q \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{c^2 + 2E_b^c \mu_{eq, in}^2} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2E_b^c \mu_{eq, in}^2}{c^2}\right)} L\lambda \right)^{-1/2} \right),$$

où c est la valeur de $\|\underline{e}\|$ prise parmi l'ensemble des erreurs symboles avec un seul bit erroné donnant β_{\min} et $\tilde{\xi}_{\min}$ contient les vecteurs d'erreur \underline{e}_b avec un seul bit erroné et les vecteurs d'erreur symbole correspondant \underline{e} qui donnent c . En notant $K_c = \frac{1}{q} \sum_{(\underline{e}_b, \underline{e}) \in \tilde{\xi}_{\min}} P(A(\underline{e}_b, \underline{e}))$, nous obtenons :

$$P_e \simeq K_c Q \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{c^2 + 2E_b^c \mu_{eq, in}^2} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2E_b^c \mu_{eq, in}^2}{c^2}\right)} L\lambda \right)^{-1/2} \right). \quad (3.4)$$

Remarque 4 Dans ce chapitre, nous avons considéré uniquement les canaux fixes vu la difficulté du calcul d'une approximation analytique de la PEB dans le cas Rayleigh. Prenons par exemple le cas particulier où tous les coefficients du canal de Rayleigh ont des variances σ_i^2 différentes. A fort E_b/N_0 , en utilisant (2.12) et (3.4) la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur MAP est approximée par :

$$P_r \simeq \frac{K_c}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\alpha_i}{\sigma_i^2} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} (c^2 y + 2E_b^c \mu_{eq, in}^2) \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2E_b^c \mu_{eq, in}^2}{c^2 y}\right)} L\lambda \right)^{-1} - \frac{1}{2\sigma_i^2} y \right) dy.$$

Vu la difficulté de trouver une expression analytique de cette intégrale, nous ne pouvons pas exploiter cette expression dans la suite.

Dans la partie suivante, nous allons vérifier par des simulations l'approximation gaussienne faite sur les LRVs extrinsèques ainsi que l'approximation (3.4) de la PEB.

3.4.3 Résultats des simulations

Distribution des LRVs extrinsèques

Nous considérons une transmission selon le schéma BICM sur un canal estimé sélectif en fréquence en utilisant une modulation MDP-8. Nous proposons d'étudier par simulations, les distributions des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur et du décodeur dans le turbo-détecteur, quand les informations *a priori* sont fiables.

La figure 3.2 montre les distributions des LRVs extrinsèques à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur à la sortie de l'égaliseur MAP, quand $\tilde{b}_k = 1$ et pour différentes conditions de simulations. Ces courbes montrent que la distribution des LRVs est un mélange de deux gaussiennes symétriques avec une gaussienne dominante.

La figure 3.3 montre la distribution des LRVs extrinsèques à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur à la sortie du décodeur MAP quand le bit codé est égal à 1 pour $E_b/N_0 = 5dB$, le canal de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), le code convolutif de polynômes générateurs (7, 5) en octal. Nous remarquons que cette distribution est aussi un mélange de deux gaussiennes symétriques.

Nous traçons sur la figure 3.4, la différence entre la distribution de la figure 3.3 et la distribution correspondant à un mélange de deux gaussiennes symétriques avec les moyennes et rapports des gaussiennes de la figure 3.3.

Etant donné que cette différence est assez faible, nous affirmons que la distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur MAP est un mélange de deux gaussiennes symétriques dont l'une est dominante par rapport à l'autre. Nous pouvons donc adopter avec une bonne précision l'approximation d'une gaussienne symétrique à l'entrée de l'égaliseur.

TEB/PEB à la sortie de l'égaliseur

Nous proposons maintenant de vérifier par simulations l'expression analytique approximée de la PEB donnée par l'équation (3.4). Nous considérons des canaux sélectifs en fréquence avec les réponses impulsionnelles (0.57; 0.817) et (0.5; 0.71; 0.5). Nous supposons que les canaux sont inconnus au niveau du récepteur et sont estimés selon le critère des moindres carrés en utilisant une séquence d'apprentissage de longueur $T_0 = L$ symboles. La séquence d'apprentissage pour le premier canal est $\tilde{s} = (-1, 1)$ et pour le deuxième canal $\tilde{s} = (-1, 1, 1)$. Nous fournissons à l'égaliseur MAP des LRVs *a priori*

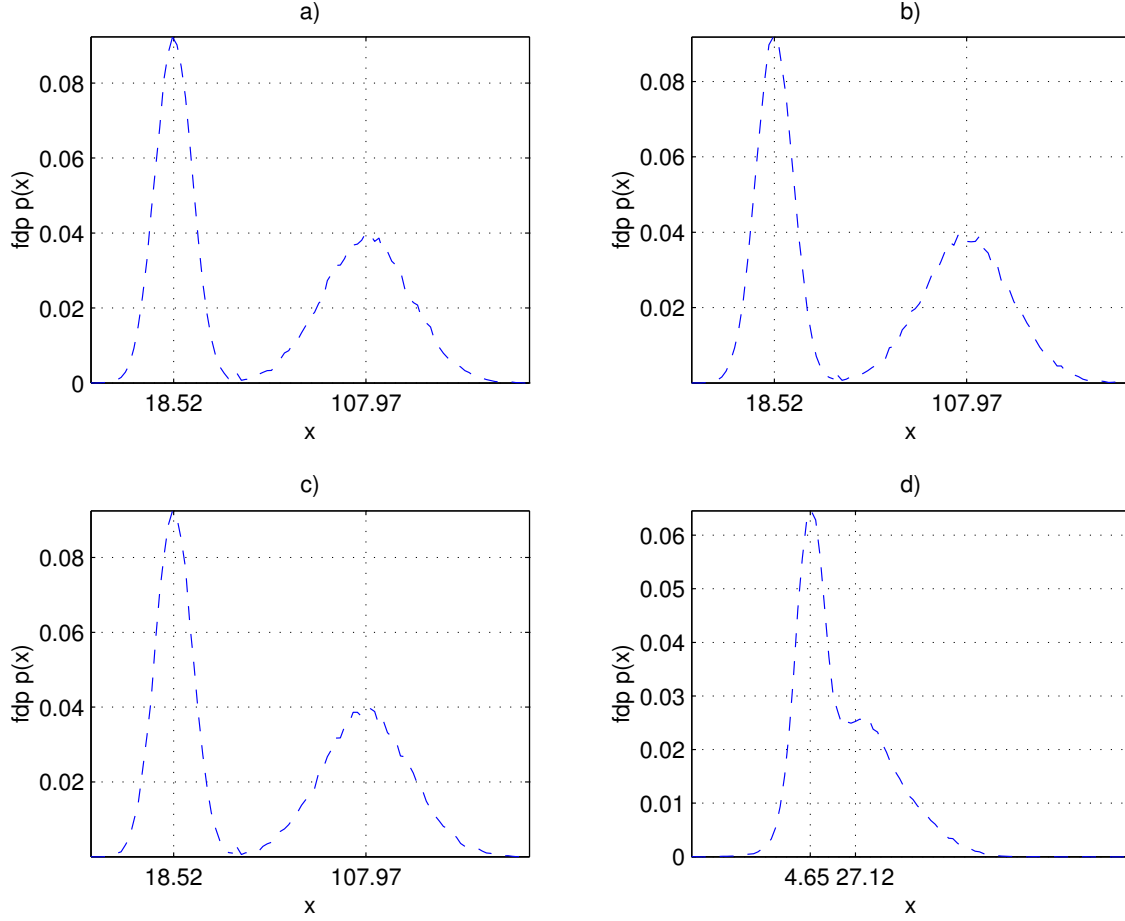


Fig. 3.2 : Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie de l'égaliseur MAP à travers un canal fixe estimé sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle \underline{h} , à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur quand $\tilde{b}_k = 1$: a) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5;0.71;0.5)$, code(7, 5). b) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.817;0.57)$, code(7, 5). c) $E_b/N_0 = 5dB$, $\underline{h}=(0.5;0.71;0.5)$, code(17, 15). d) $E_b/N_0 = 2dB$, $\underline{h}=(0.5;0.71;0.5)$, code(7, 5).

artificiels sur les bits $\tilde{b}_k \in \{-1, +1\}$ qui sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne de la forme $N\left(\frac{2\tilde{b}_k\sqrt{E_b^c}\mu_{e_q,in}^2}{\sigma^2}, \frac{4\sqrt{E_b^c}\mu_{e_q,in}^2}{\sigma^2}\right)$, pour $\mu_{e_q,in}$ donné. Nous considérons une modulation MDP-8 ($q = 3$) avec un mapping de Gray. Nous avons deux valeurs possibles de $\|\underline{e}\|^2$ en considérant les événements d'erreurs avec un seul bit erroné (voir Annexe A). En évaluant l'expression 3.4 pour chacune de ces valeurs, nous trouvons que pour la modulation MDP-8 et sous les conditions de simulations considérées la valeur de $c^2 = (2 - \sqrt{2}) E_s$. Dans le but de calculer K_c , nous devons calculer $P(A(\underline{e}_b, \underline{e}))$ pour chaque couple $(\underline{e}_b, \underline{e})$ correspondant à un seul bit erroné et donc un seul symbole erroné et donnant c . Pour le mapping de Gray de la figure 2.3, $A\left((0, 0, 1), \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right)\sqrt{E_s}\right) =$

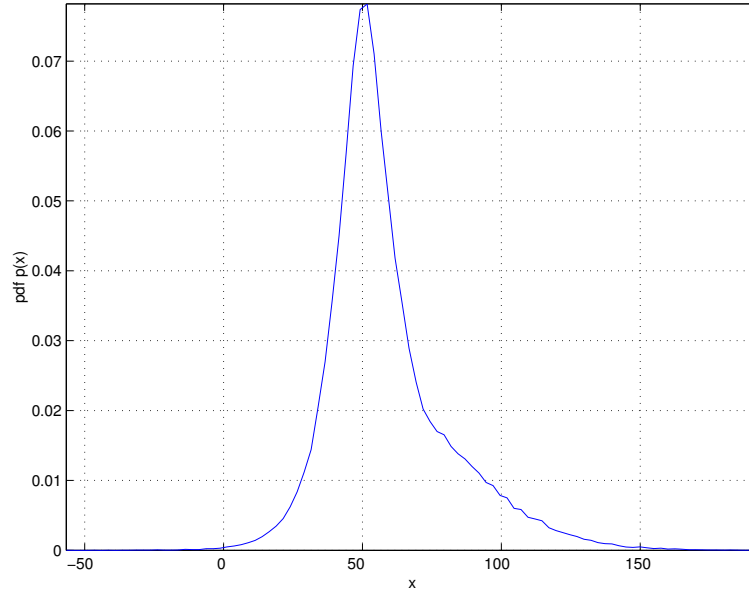


Fig. 3.3 : Distribution des LRVs extrinsèques à la sortie du décodeur MAP à travers un canal fixe sélectif en fréquence avec $E_b/N_0 = 5dB$ et à la 3^{ème} itération du turbo-détecteur quand le bit codé est égal à 1.

$\{(0, 0, 0)\}$ et ainsi $P\left(A\left((0, 0, 1), \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right)\sqrt{E_s}\right)\right) = \frac{1}{8}$. Pour ce mapping, il est clair que toutes les probabilités $P(A(\underline{e}_b, \underline{e}))$ sont égales à $\frac{1}{8}$ et puisqu'il y a 16 couples $(\underline{e}_b, \underline{e})$ qui donnent cette valeur de c alors $K_c = \frac{2}{3}$.

Les figures 3.5 et 3.6 montrent le TEB obtenu par simulations à la sortie de l'égaliseur MAP quand le canal est estimé en fonction de E_b/N_0 respectivement pour les canaux de réponses impulsionnelles (0.57; 0.817) et (0.5; 0.71; 0.5). Les figures montrent aussi l'approximation de la PEB donnée par (3.4). Chaque courbe est obtenue pour $\mu_{eq,in}$ constant. Nous remarquons que quand les informations *a priori* sont fiables, les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par simulations. Quand les informations *a priori* sont moins fiables ($\mu_{eq,in} < 0.5$), l'approximation est moins précise. Nous remarquons aussi que l'approximation est meilleure pour le canal de réponse impulsionnelle (0.57; 0.817) qui est peu sévère.

Afin d'améliorer les performances du turbo-détecteur, nous proposons, dans la section suivante, d'optimiser le choix du mapping de manière à minimiser l'approximation (3.4) de la PEB à la sortie de l'égaliseur.

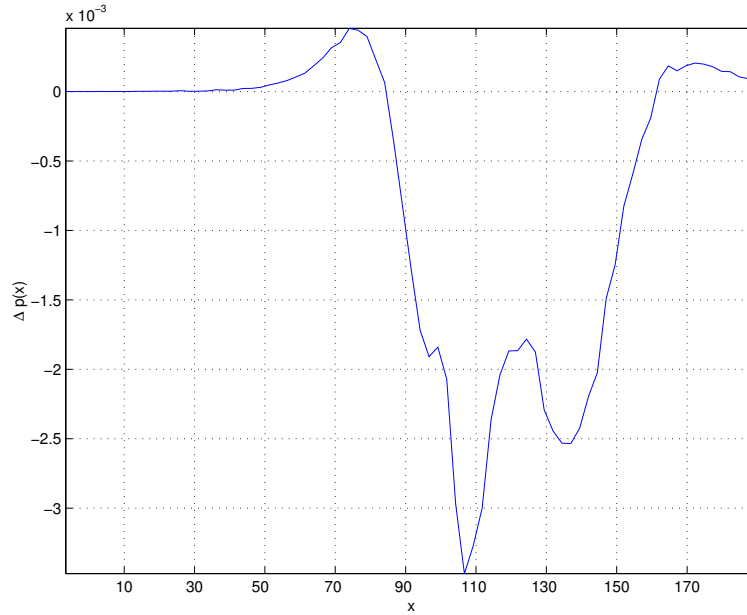


Fig. 3.4 : Différence entre la distribution de la figure 3.3 et la distribution d'un mélange de deux gaussiennes symétriques avec les mêmes rapports et moyennes

3.5 Optimisation du mapping

Notre but dans cette section est de trouver le mapping qui minimise l'expression approximée de la PEB donnée dans (3.4).

Etant donné qu'une recherche exhaustive est compliquée quand la taille de la constellation augmente, nous proposons d'utiliser l'algorithme BSA et de l'adapter à notre cas. Dans le chapitre précédent, notre but était de maximiser $e_{\min}^2 + 2E_b^c \mu_{eq,in}^2$ (voir (2.8)). Nous avons donc supposé que $\mu_{eq,in}$ ne dépendait pas du mapping et nous avons cherché le mapping qui maximise e_{\min} .

Dans ce chapitre, pour maximiser $\sqrt{c^2 + 2E_b^c \mu_{eq,in}^2} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2E_b^c \mu_{eq,in}^2}{c^2} \right)} L\lambda \right)^{-1/2}$ dans (3.4),

il faut connaître la valeur de $\mu_{eq,in}$ à la convergence. Cette valeur dépend du rapport $\frac{E_b}{N_0}$, du canal, de l'estimation du canal et du mapping. Nous sommes donc contraints de travailler à des conditions de simulations fixes. Au début de l'algorithme BSA, nous devons ainsi déterminer pour le mapping initial, le $\frac{E_b}{N_0}$ choisi, la séquence d'apprentissage, le canal et le codeur considérés, la valeur de $\mu_{eq,in}$ à la convergence par simulations. Lorsque nous exécutons l'algorithme BSA, cette valeur va changer vu qu'on change de

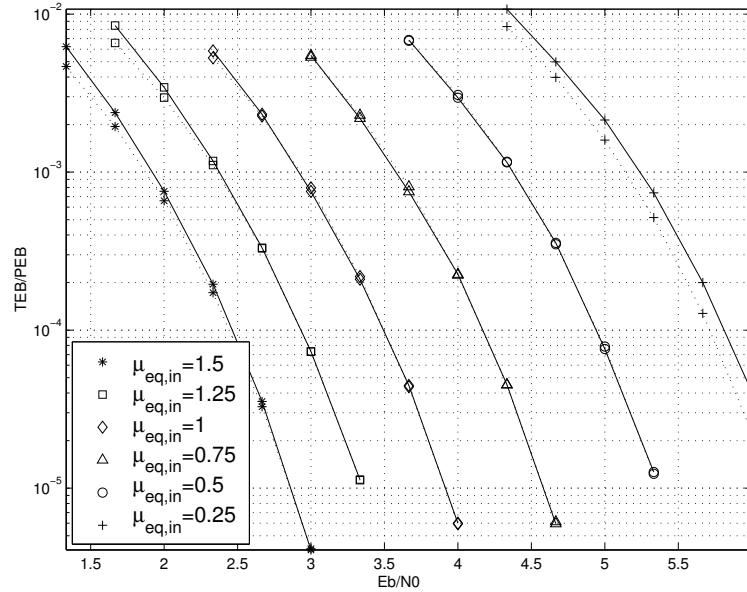


Fig. 3.5 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et celles basées sur l'approximation analytique (3.4) (en traits continus) : canal de réponse impulsionnelle (0.57;0.817), modulation MDP-8 avec un mapping de Gray et $T_0 = 2$.

mapping. Nous avons observé par simulations que la valeur de $\mu_{eq,in}$ ne change pas de manière significative à chaque étape de l'algorithme (à chaque échange). Nous l'illustrons par un exemple dans ce qui suit. Nous considérons le canal de réponse impulsionnelle (0.5;0.71;0.5), le codeur (7,5), $\frac{E_b}{N_0} = 5dB$, la séquence d'apprentissage $\tilde{\underline{s}} = (-1, 1, 1)$ et la modulation MDP-8. Nous exécutons l'algorithme BSA. La figure 3.7 montre les mappings obtenus aux différentes étapes de l'algorithme. Le tableau 3.2 montre les valeurs de $\mu_{eq,in}$ obtenues à la convergence. Nous remarquons que la variation de $\mu_{eq,in}$ est faible au cours de l'algorithme et nous la négligeons donc dans la suite.

TABLEAU 3.2: Valeurs de $\mu_{eq,in}$ à la convergence au cours de l'algorithme BSA relatif à la figure 3.7

mapping	valeur de $\mu_{eq,in}$
mapping1	0.915
mapping2	0.94
mapping3	0.982
mapping4	1.05

A titre d'exemple, sous ces mêmes conditions de simulations, nous donnons dans

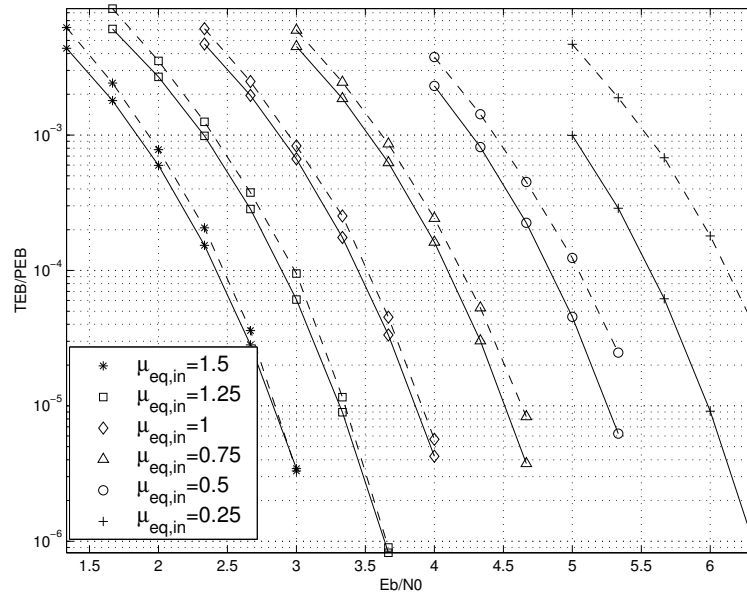


Fig. 3.6 : Comparaison des courbes de TEB à la sortie de l'égaliseur obtenues par simulations (en traits discontinus) et celles basées sur l'approximation analytique (3.4) (en traits continus) : canal de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), modulation MDP-8 avec un mapping de Gray et $T_0 = 3$.

la figure 3.8 les mappings optimisés obtenus en utilisant l'algorithme BSA pour $\frac{E_b}{N_0} = 5dB$, le canal de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5), le codeur convolutif de polynômes générateurs (7, 5), la séquence d'apprentissage $\tilde{s} = (-1, 1, 1)$ pour la MDP-8 et la MAQ-16.

Résultats des simulations :

Nous proposons maintenant de comparer les performances du turbo-détecteur avec le mapping optimisé ou le mapping de Gray. Nous considérons une transmission à travers un canal sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.57; 0.817). Les bits d'information sont codés par un code convolutif de rendement 1/2 et de polynômes générateurs (7, 5) en octal. La séquence d'apprentissage est $\tilde{s} = (-1, 1)$. Nous considérons les modulations MDP-8 et MAQ-16. La longueur de l'entrelaceur binaire est 32766 pour la modulation MDP-8 et 32768 pour la modulation MAQ-16.

Les figures 3.9 et 3.10 montrent le TEB à la sortie du turbo-détecteur obtenu avec le mapping de Gray ou le mapping optimisé à différentes itérations en fonction de E_b/N_0 , respectivement pour les modulations MDP-8 et MAQ-16. A fort E_b/N_0 , le TEB obtenu pour le mapping optimisé est bien meilleur que le TEB obtenu pour le mapping de Gray. Ceci n'est pas le cas à faible E_b/N_0 puisque notre étude suppose que les erreurs sont en

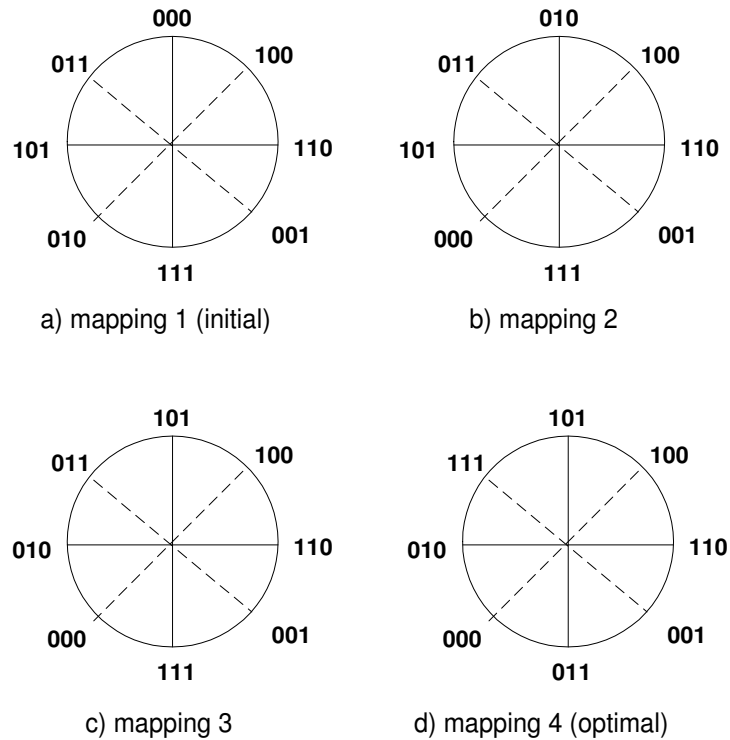


Fig. 3.7 : Exemple de mappings obtenus par l'algorithme BSA : canal $(0.5; 0.71; 0.5)$, code $(7, 5)$, $\frac{E_b}{N_0} = 5dB$, $\tilde{s} = (-1, 1, 1)$ et la modulation MDP-8.

majorité isolées ce qui a lieu lorsque E_b/N_0 est assez élevé.

Etant donné qu'un mapping ne peut pas être le meilleur pour tout rapport signal à bruit (RSB), nous proposons, dans la section suivante comme dans le chapitre 2, d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission. Nous considérons uniquement deux mappings : le mapping de Gray et le mapping optimisé donné par notre étude.

3.6 Mapping adaptatif

3.6.1 Principe du mapping adaptatif

Dans ce chapitre, vu que le canal est fixe, le rapport signal à bruit de la transmission est constant et est égal à E_b/N_0 . Nous définissons le *RSBseuil* comme étant le RSB du point d'intersection entre les courbes obtenues en utilisant le mapping de Gray et

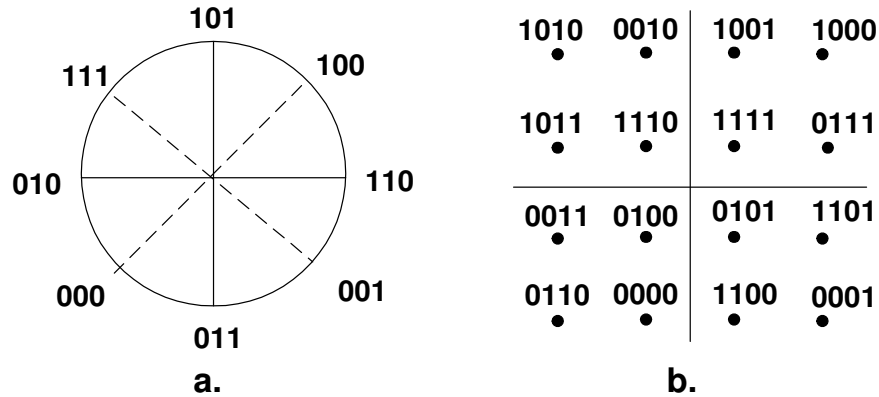


Fig. 3.8 : Mapping optimisé pour $\frac{E_b}{N_0} = 5dB$, le canal $(0.5; 0.71; 0.5)$, le code $(7, 5)$ et $\tilde{s} = (-1, 1, 1)$: a. mapping MDP-8 et b. mapping MAQ-16.

le mapping optimisé à la convergence du turbo-détecteur (voir section 2.6.2). Dans les conditions de la figure 3.9, le RSB_{seuil} est égal à 5.7 dB. Nous comparons E_b/N_0 de la transmission au RSB_{seuil} . S'il est inférieur au RSB_{seuil} , nous considérons le mapping de Gray et sinon nous considérons le mapping optimisé.

3.6.2 Résultats des simulations

Dans les simulations, les blocs sont codés avec un codeur convolutif de rendement $1/2$ et de polynômes générateurs $(7, 5)$ en octal. L'entrelaceur est choisi aléatoirement. Nous considérons les canaux estimés sélectifs en fréquence. Nous utilisons les modulations MDP-8 et MAQ-16. La longueur de l'entrelaceur est 16386 pour la modulation MDP-8 et 16400 pour la modulation MAQ-16.

Nous reprenons les mêmes conditions des figures 3.9 et 3.10 et nous représentons en plus, sur les figures 3.11 et 3.12 les courbes obtenues en utilisant le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge). Toutes les courbes sont obtenues à la convergence du turbo-détecteur.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un schéma BICM à travers un canal sélectif en fréquence fixe. Le canal a été supposé inconnu au niveau du récepteur. Nous avons

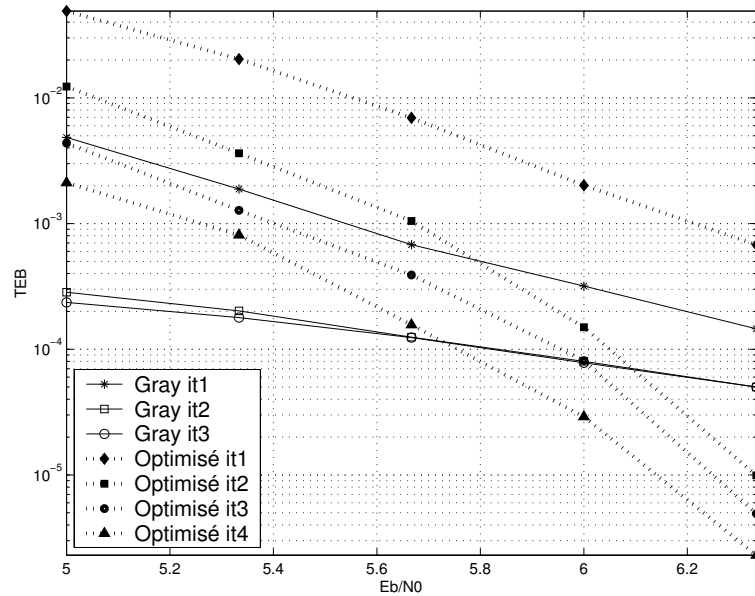


Fig. 3.9 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés).

considéré au niveau du récepteur un turbo-détecteur MAP. Nous avons analysé les performances de l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* provenant du décodeur MAP en plus des observations et de l'estimation du canal. Ensuite, nous avons donné une approximation asymptotique de la PEB à la sortie de l'égaliseur MAP quand les informations *a priori* sont fiables. Les simulations ont montré que ces expressions analytiques donnent une bonne approximation des performances de l'égaliseur, particulièrement à fort E_b/N_0 . Nous avons alors trouvé le mapping minimisant l'approximation analytique de la PEB trouvée. Les simulations ont montré que les performances obtenues pour le mapping optimisé sont meilleures que celles obtenues pour le mapping de Gray, à fort rapport E_b/N_0 . En tenant compte de ces résultats, nous avons proposé d'adapter le mapping selon le RSB de la transmission.

Dans le chapitre suivant, nous considérons un canal sélectif en temps et en fréquence et nous nous intéressons au problème d'estimation de ce canal selon le critère MAP.

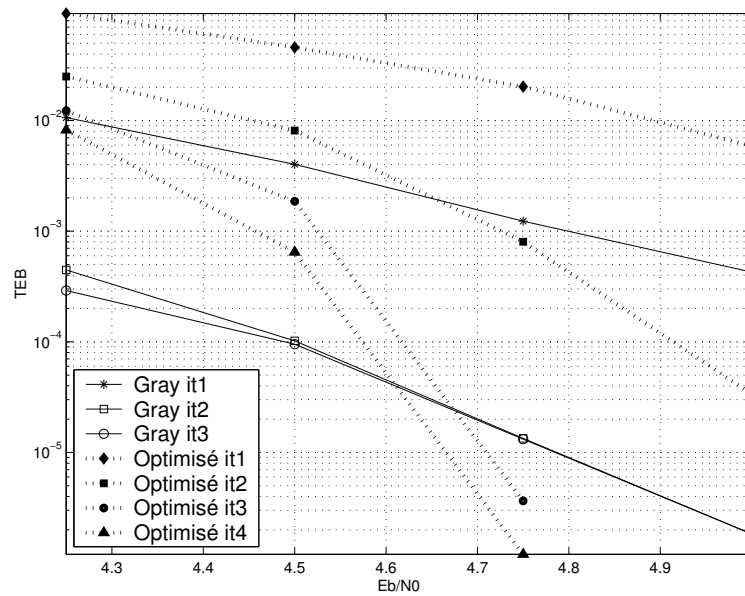


Fig. 3.10 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé pour un mapping de Gray (courbes en traits continus) et le mapping optimisé (courbes en pointillés)

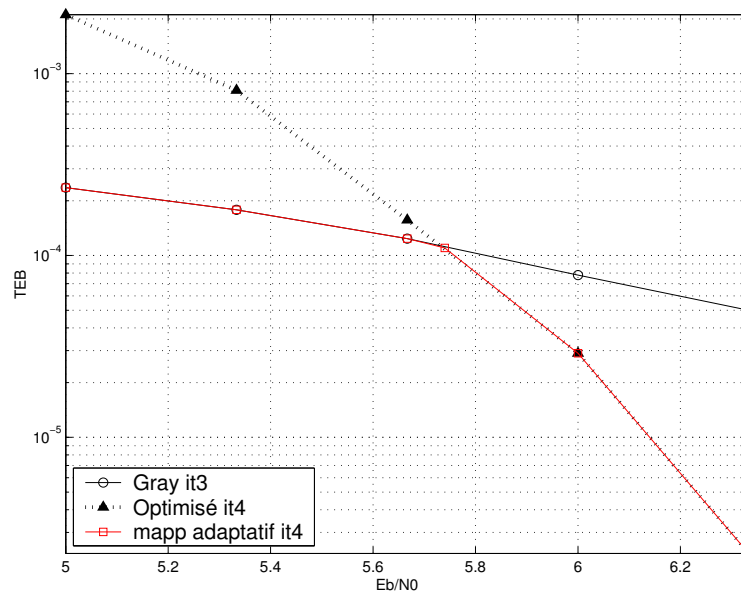


Fig. 3.11 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MDP-8 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé sélectif en fréquence avec une réponse impulsionnelle (0.57;0.817), pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).

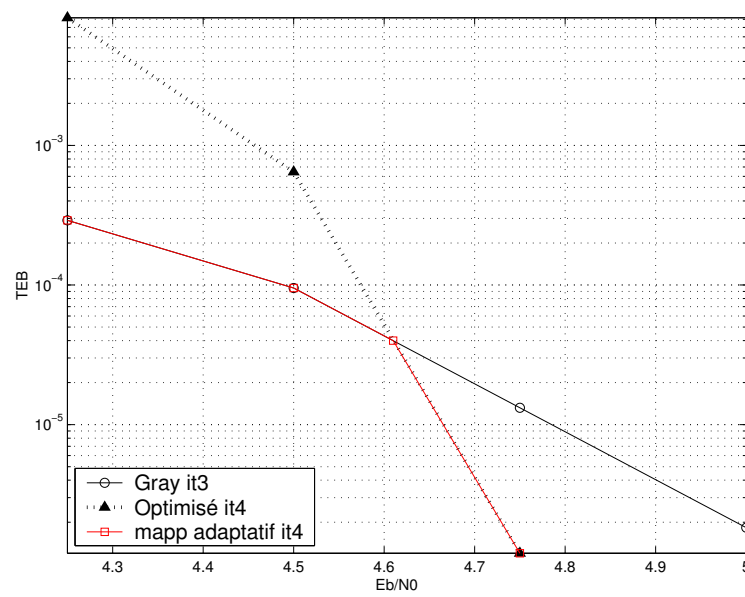


Fig. 3.12 : TEB en fonction de E_b/N_0 pour une modulation MAQ-16 à la sortie du décodeur dans un turbo-détecteur à travers un canal estimé sélectif en fréquence, pour un mapping de Gray (courbes en traits continus), le mapping optimisé (courbes en pointillés) et le mapping adaptatif (courbes en pointillés rouge).

Chapitre 4

Récepteur itératif avec réestimation d'un canal sélectif en temps et en fréquence

4.1 Introduction

Nous avons considéré dans les deux chapitres précédents une transmission de symboles codés (BICM : Bit Interleaved coded Modulation) à travers un canal sélectif en fréquence, constant sur un bloc et pouvant éventuellement varier d'un bloc à un autre. Or, en raison de la mobilité, un canal subit des variations temporelles et il est ainsi réputé sélectif en temps. Dans ce cas, le problème de son estimation devient plus compliqué.

Dans ce chapitre, nous considérons l'estimation selon le critère MAP du canal sélectif en temps et en fréquence. Le canal est modélisé suivant le modèle de Jakes [11, 24]. Notre approche consiste à représenter convenablement le canal discret sur chaque bloc en utilisant le théorème de Karhunen-Loève (KL) [37] pour chaque trajet. Le but est d'estimer les paramètres de cette représentation. Etant donnée la difficulté de résoudre le problème directement, nous proposons d'utiliser l'algorithme Expectation-Maximization (EM) [10] pour approcher itérativement la solution. Cette approche a été déjà utilisée dans [23] pour des canaux sélectifs en temps et en fréquence, utilisant l'Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM). Nous considérons dans ce chapitre une transmission codée (BICM) et un turbo-détecteur formé par un égaliseur MAP et un décodeur MAP. Nous intégrons l'algorithme d'estimation de canal dans ce récepteur itératif. A chaque itération du récepteur itératif, des nouvelles informations sur les bits émis (probabilités

a posteriori sur les bits codés) sont calculées à la sortie du décodeur. Ces informations deviennent de plus en plus fiables au fil des itérations. L'idée est donc d'utiliser ces informations pour améliorer l'estimation de canal. L'algorithme EM ainsi obtenu est complexe à réaliser puisque chaque itération est faite en L étapes ($L - 1$ étant la mémoire du canal). Nous proposons alors de simplifier cet algorithme en négligeant le terme d'interférence entre symboles [27]. Nous avons ainsi une seule étape par itération. Dans le but de réduire l'erreur causée par cette simplification, nous utilisons le principe du "selected mapping" utilisé d'habitude pour réduire la puissance moyenne crête élevée (PAPR : Peak to Average Power Ratio) des systèmes OFDM [32]. Ainsi, un précodeur candidat sera choisi au niveau de l'émetteur parmi un ensemble de précodeurs de façon à minimiser la valeur quadratique moyenne du terme d'interférence négligé. Nous supposons que le récepteur connaît le précodeur choisi.

Nous commençons ce chapitre par présenter le système. Puis, nous donnons une représentation du canal discret en utilisant le théorème de KL. Ensuite, nous présentons l'estimation de canal suivant le critère MAP en utilisant l'algorithme EM. Nous donnons aussi la structure du récepteur itératif utilisant une estimation de canal. A la fin de ce chapitre, nous présentons le précodage suivant le principe du "selected mapping" [32].

4.2 Modélisation du système

Nous avons étudié dans les chapitres précédents le cas des canaux sélectifs en fréquences. Une des caractéristiques des réseaux mobiles est la mobilité de l'émetteur, du récepteur et/ou des obstacles. Un canal subit alors des variations temporelles et il est également sélectif en temps. Nous considérons, dans ce chapitre, un schéma BICM à travers un canal sélectif en temps et en fréquence. La séquence d'entrée est codée en utilisant un codeur convolutif non récursif et non systématique. La sortie du codeur est ensuite entrelacée, par un entrelaceur choisi aléatoirement pour chaque bloc, et modulée selon un alphabet Ω . Après, les symboles sont précodés et transmis à travers un canal sélectif en temps et en fréquence suivant le modèle de Jakes (figure 4.1) (le précodeur sera expliqué dans la section 4.7.1). Nous supposons que la transmission est organisée en blocs de N symboles. La modulation utilisée est de type Modulation à Déplacement de Phase (MDP). Au milieu de chaque bloc, une séquence d'apprentissage CAZAC [34] est intégrée pour estimer le canal. Nous utilisons des séquences CAZAC car elles ont des propriétés idéales d'autocorrélation et d'intercorrélation et permettent d'obtenir la meilleure estimée du

canal en terme d'erreur d'estimation. Après échantillonnage au rythme symbole, le signal reçu à un instant k est :

$$x_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_k^l s_{k-l} + n_k, \text{ pour } 0 \leq k \leq N + L - 2 \quad (4.1)$$

où $L - 1$ est la mémoire du canal, s_i , pour $0 \leq i \leq N - 1$, sont les symboles transmis, h_k^l est le coefficient du $l^{\text{ème}}$ trajet du canal à l'instant k vu par le symbole s_{k-l} et n_k , pour $0 \leq k \leq N + L - 2$, sont des échantillons de bruit modélisés par des variables aléatoires indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) avec une ddp gaussienne $N_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$. A noter que les symboles virtuels s_i , pour $i < 0$ ou $i > N - 1$, sont supposés connus par le récepteur et peuvent être mis à 0. En plus, les coefficients h_k^l , pour $k < l$ ou $k > l + N - 1$, sont supposés égaux à 0 et ne sont pas utilisés dans le calcul de x_k .

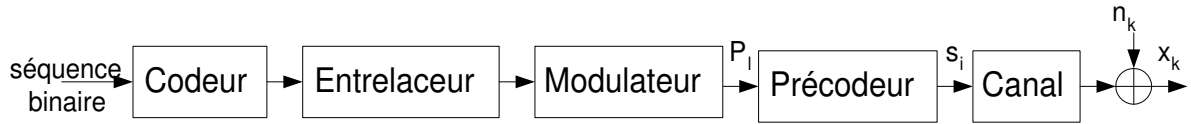


Fig. 4.1 : Structure de l'émetteur

Soient les vecteurs des symboles reçus

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N+L-2})^T$$

et des symboles transmis normalisés

$$\underline{S} = (S_0, \dots, S_{N-1})^T,$$

où $S_k = s_k / \sqrt{E_s}$, pour $0 \leq k \leq N - 1$ et E_s est l'énergie symbole.

Nous pouvons alors réécrire (4.1) comme suit :

$$x_k = \sum_{l=0}^{L-1} H_k^l S_{k-l} + n_k,$$

où $H_k^l = \sqrt{E_s} h_k^l$, pour $0 \leq k \leq N + L - 2$ et $0 \leq l \leq L - 1$.

Nous notons le vecteur de coefficients du canal correspondant au $l^{\text{ème}}$ trajet :

$$\underline{H}^l = (H_l^l, H_{l+1}^l, \dots, H_{l+N-1}^l)^T .$$

4.3 Modèle du canal

Le canal de propagation vu par le récepteur peut varier à l'intérieur d'un même bloc. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur. D'un point de vue physique, le caractère variable du canal peut être caractérisé par le produit $B_d T_s$ où B_d est la dispersion Doppler du canal et T_s est la durée symbole. Plus ce produit est grand, plus le canal varie rapidement dans les domaines temporel et fréquentiel. Le modèle utilisé dans la suite est le modèle de Jakes [11, 24].

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'estimation du canal. Cette estimation étant complexe, nous commençons par représenter convenablement le canal afin de le simplifier.

4.4 Représentation convenable du canal discret

Nous considérons ici un canal variable dans le temps. Nous avons besoin d'une représentation précise du canal discret pour pouvoir l'estimer. Cette représentation est donnée par une version discrète du théorème d'expansion orthogonale de KL [2]. Ainsi, le $l^{\text{ème}}$ vecteur du canal discret \underline{H}^l peut être exprimé par :

$$\underline{H}^l = \sum_{k=0}^{N-1} G_k^l \underline{B}_k^l,$$

où $\{\underline{B}_k^l\}_{k=0}^{N-1}$, pour $0 \leq l \leq L - 1$, sont les vecteurs propres normalisés de la matrice de covariance du canal discret $\underline{\underline{F}}^l = E[\underline{H}^l (\underline{H}^l)^\dagger]$ et $\{G_k^l\}_{k=0}^{N-1}$ sont des coefficients gaussiens complexes indépendants de moyennes nulles et de variances égales aux valeurs propres $\{\Gamma_k^l\}_{k=0}^{N-1}$ de la matrice de covariance $\underline{\underline{F}}^l$. Ces variances sont supposées classées dans un ordre décroissant.

Chaque trajet l du canal est caractérisé par sa puissance moyenne et par le Spectre de Puissance Doppler (SPD). Pour chaque trajet l , la fonction d'autocorrélation en temps $\phi^l(\Delta t)$ [37] du canal sélectif en temps et en fréquence, à spectre de puissance Doppler classique et à profil d'intensité multitrajets exponentiel, de puissance moyenne $\phi^l(0)$, est donnée par :

$$\phi^l(\Delta t) = \phi^l(0) J_0(\pi B_d \Delta t),$$

où B_d est la dispersion Doppler du canal et $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

Le (p, q) ^{ème} élément de la matrice $\underline{\underline{F}}^l$ est donné par :

$$F_{p,q}^l = \phi^l((p - q)T_s) E_s,$$

où T_s est la durée symbole.

Nous supposons que les trajets ont les mêmes statistiques. Alors, les vecteurs propres sont les mêmes pour tous les trajets et les valeurs propres sont égales, au facteur $\phi^l(0)$ près. Ainsi, nous omettons dans toute la suite l'exposant l relatif au trajet dans \underline{B}_k^l .

Nous remarquons qu'à part quelques valeurs propres, toutes les autres sont négligeables. Ainsi, pour simplifier la représentation du canal, seulement les K premiers vecteurs propres qui correspondent aux valeurs propres les plus significatives seront considérés.

Dans la suite du travail, nous supposons que le canal est inconnu au niveau du récepteur, ce qui est toujours le cas en pratique. Nous proposons un algorithme d'estimation itérative du canal sélectif en temps et en fréquence suivant le critère MAP.

4.5 Estimation itérative du canal suivant le critère MAP

Dans ce qui suit, nous proposons d'estimer le canal à travers l'estimation des coefficients G_k^l de la représentation du canal donnée précédemment. On suppose que les vecteurs \underline{B}_k sont parfaitement estimés au niveau du récepteur. L'estimation suivant le critère MAP de $\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$, avec $\underline{G}^l = (G_0^l, G_1^l, \dots, G_{N-1}^l)^T$, pour $0 \leq l \leq L - 1$, est donnée par :

$$\left\{ \widehat{\underline{G}}^l \right\}_{l=0}^{L-1} = \arg \max_{\left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1}} p \left(\left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1} \mid \underline{x} \right). \quad (4.2)$$

Il est difficile de résoudre (4.2) directement. Cependant, la solution peut être approchée d'une manière itérative en utilisant l'algorithme EM [10].

Dans ce qui suit, nous présentons l'estimation du canal basée sur l'algorithme EM. L'algorithme obtenu est assez compliqué vu que chaque itération comporte L étapes. Nous proposons donc une version approximée en négligeant le terme d'interférences entre symboles.

4.5.1 Expression exacte de l'estimation du canal

L'algorithme EM donne une réestimation des vecteurs $\left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1}$ de manière à garantir une croissance de la probabilité *a posteriori* $p \left(\left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1} \mid \underline{x} \right)$. Chaque itération $d + 1$ de l'algorithme comporte deux étapes :

- *Etape E (Expectation)* :

$$\text{Calculer } Q \left(\left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1} \right) = \sum_{\underline{S}} \left[p \left(\underline{x}, \underline{S}, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1} \right) \log p \left(\underline{x}, \underline{S}, \left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1} \right) \right].$$

- *Etape M (Maximization)* :

Trouver $\left\{ \underline{G}^{l(d+1)} \right\}_{l=0}^{L-1}$ qui maximise $Q \left(\left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1} \right)$, comme fonction de $\left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1}$, où $\underline{G}^{l(d)}$ sont les estimées de \underline{G}^l pour $0 \leq l \leq L - 1$ à la $d^{\text{ème}}$ itération.

Chaque itération $d+1$ de l'algorithme EM se fait en L étapes. A la $i^{\text{ème}}$ étape, nous disposons de $\left\{ \left\{ \underline{G}^{l(d+1)} \right\}_{l=0}^{i-1}, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=i}^{L-1} \right\}$ et nous évaluons $\underline{G}^{i(d+1)} = \arg \max_{\underline{G}^i} Q \left(\left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{ \underline{G}^l \right\}_{l=0}^{L-1} \right)$, où $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d+1)}$ si $l < i$, $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d)}$ si $l \geq i$, $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d+1)}$ si $l < i$ et $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d)}$ si $l > i$. Nous obtenons alors $\left\{ \left\{ \underline{G}^{l(d+1)} \right\}_{l=0}^i, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=i+1}^{L-1} \right\}$.

Nous avons montré dans l'Annexe E que l'expression du $m^{\text{ème}}$ élément de la réestimation $\underline{G}^{i(d+1)}$ à la $i^{\text{ème}}$ étape de la $(d + 1)^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme EM est donnée par :

$$G_m^{i(d+1)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\Gamma_m^i}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\underline{S}_{k-L+1}^k} P \left(\underline{S}_{k-L+1}^k \mid \underline{x}, \left\{ \left\{ \underline{G}^{l(d+1)} \right\}_{l=0}^{i-1}, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=i}^{L-1} \right\} \right) x_k^i B_{mk}^* S_{k-i}^*, \quad (4.3)$$

où $\underline{S}_{k-L+1}^k = (S_{k-L+1}, \dots, S_k)^T$ pour $0 \leq k \leq N - 1$, et

$$x_k^i = x_k - \left(\sum_{l=0}^{i-1} H_k^{l(d+1)} S_{k-l} + \sum_{l=i+1}^{L-1} H_k^{l(d)} S_{k-l} \right), \quad (4.4)$$

où $H_k^{l(d)}$ et $H_k^{l(d+1)}$ sont respectivement l'estimation de H_k^l à la $d^{\text{ème}}$ et $(d+1)^{\text{ème}}$ itérations et B_{mk} représente le $k^{\text{ème}}$ élément du vecteur \underline{B}_m .

Pour initialiser l'estimation du canal, nous notons que l'expression du $m^{\text{ème}}$ élément de la première estimée $\underline{G}^{i(0)}$, $0 \leq i \leq L-1$ est donnée par :

$$G_m^{i(0)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\Gamma_m^i}} \sum_{n \in A_p} x_{n+i} S_n^* B_{m(n+i)}^*$$

où A_p est l'ensemble des indices des symboles d'apprentissage. Notons qu'il existe d'autres méthodes pour obtenir l'estimation initiale du canal.

4.5.2 Expression approximée de l'estimation itérative du canal

L'implantation de l'algorithme EM obtenu précédemment est complexe, puisque nous devons calculer les coefficients x_k^i en L étapes successives à chaque itération de l'algorithme EM. De plus, les termes d'interférence entre symboles dans l'équation (4.3) donnent une somme destructive dans l'estimation du canal. Nous proposons, alors, de simplifier l'algorithme en négligeant ces termes dans (4.4). Ainsi, l'expression approximée du $m^{\text{ème}}$ élément de $\underline{G}^{i(d+1)}$ à la $(d+1)^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme EM est :

$$G_m^{i(d+1)} \simeq \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\Gamma_m^i}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left(\sum_{S_{k-i}} P \left(S_{k-i} | \underline{x}, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1} \right) S_{k-i}^* \right) B_{mk}^*. \quad (4.5)$$

Cette équation est facile à implanter puisque nous n'avons pas à calculer les coefficients x_k^i . En utilisant cette expression approximée, chaque itération de l'algorithme EM se fait en une seule étape au lieu de L étapes.

4.6 Récepteur itératif avec réestimation du canal en l'absence de précodage

4.6.1 Principe du récepteur itératif

Nous proposons d'intégrer l'algorithme d'estimation de canal dans un turbo-détecteur constitué d'un égaliseur MAP et d'un décodeur MAP. A la première itération du récepteur, l'estimateur de canal utilise une séquence d'apprentissage pour évaluer l'estimation $\{\underline{G}^{l(0)}\}_{l=0}^{L-1}$. Aucune information *a priori* n'est disponible à l'entrée de l'égaliseur. L'égaliseur MAP utilise l'estimation de canal pour calculer les probabilités *a posteriori* sur les bits codés. Ces probabilités sont ensuite désentrelacées et fournies au décodeur comme étant des probabilités *a priori*. Le décodeur MAP calcule les probabilités *a posteriori* et par suite les probabilités extrinsèques sur les bits codés. Les probabilités extrinsèques sont ensuite entrelacées et fournies à l'égaliseur, à l'itération suivante comme probabilités *a priori*. L'estimateur de canal utilise les probabilités *a posteriori* calculées par le décodeur MAP pour évaluer les probabilités $P\left(S_{k-L+1}^k | \underline{x}, \left\{ \left\{ \underline{G}^{l(d+1)} \right\}_{l=0}^{i-1}, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=i}^{L-1} \right\}\right)$ de l'équation (4.3) ou $P\left(S_{k-i} | \underline{x}, \left\{ \underline{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ de l'équation (4.5) selon la version considérée de l'algorithme EM. La nouvelle estimation du canal est fournie à l'égaliseur à l'itération suivante. Ainsi, à chaque itération du récepteur itératif, nous effectuons une itération de l'algorithme EM. Après quelques itérations, des décisions dures sont prises par le décodeur sur les bits d'information.

La figure 4.2 représente la structure du récepteur itératif avec estimation de canal.

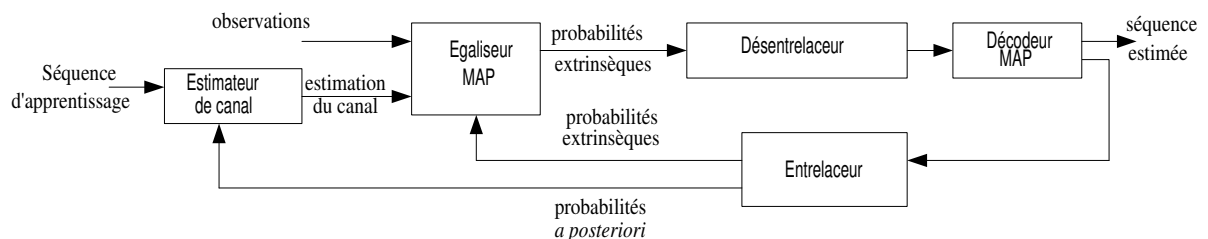


Fig. 4.2 : Récepteur itératif avec estimation de canal

4.6.2 Résultats des simulations

Les bits d'information sont codés en utilisant le code convolutif de rendement $1/2$ et de polynômes générateurs $(7, 5)$ en octal. Pour chaque bloc de symboles d'entrée, nous utilisons un entrelaceur aléatoire. La longueur de la séquence binaire est égale à 400 symboles. La modulation utilisée est la MDP-2. La longueur du canal est $L = 3$. La séquence d'apprentissage est constituée de 3 séquences CAZAC [34] de 8 symboles uniformément réparties le long de la séquence d'entrée. Nous traçons dans la figure 4.3 les valeurs propres Γ_k^l de la matrice de covariance du canal (classées par ordre décroissant) en fonction de k pour différentes longueurs de séquences, $B_d T_s = 10^{-3}$ (courbe en traits discontinus) et $B_d T_s = 10^{-5}$ (courbe en traits continus). Cette figure montre que nous pouvons nous limiter dans la représentation du canal basée sur la décomposition de KL à $K = 1$ vecteur propre si $B_d T_s = 10^{-5}$ et $K = 2$ vecteurs propres si $B_d T_s = 10^{-3}$.

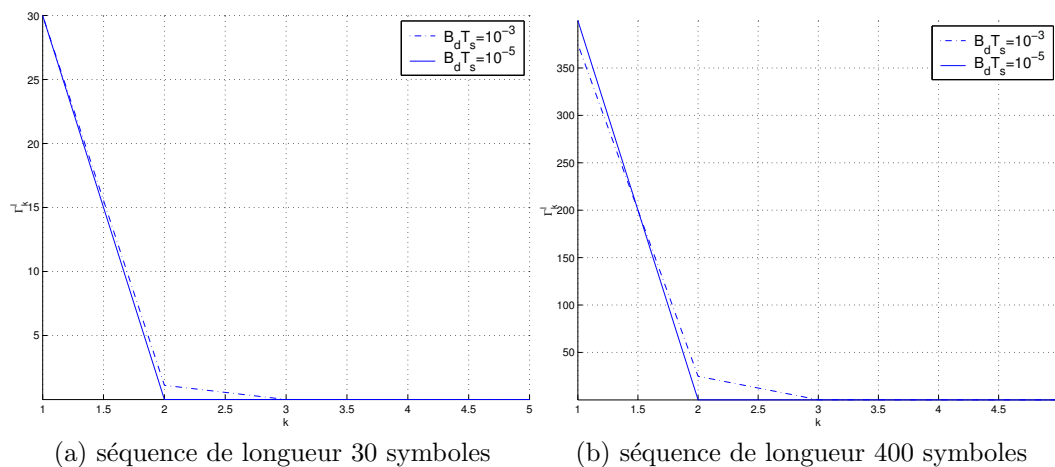


Fig. 4.3 : Valeurs propres Γ_k^l en fonction de k pour $B_d T_s = 10^{-3}$ (courbe en traits discontinus) et $B_d T_s = 10^{-5}$ (courbe en traits continus)

La figure 4.4 montre le Taux d'Erreur Binaire (TEB) en fonction du Rapport Signal à Bruit moyen reçu, $RSB = \sum_{l=0}^{L-1} \phi^l(0) E_s / \sigma^2$, pour $B_d T_s = 10^{-5}$ et différentes itérations du récepteur itératif. La modulation utilisée est la MDP-2. Les performances du récepteur itératif avec estimation de canal en considérant l'expression approximée (4.5) (les courbes en traits continus) sont comparées aux performances du récepteur itératif avec estimation de canal en utilisant l'expression exacte (4.3) (les courbes en pointillés) et aux performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (les courbes en

traits discontinus). Nous remarquons que les performances obtenues en utilisant l'expression exacte (4.3) sont meilleurs que celles obtenues en utilisant l'expression approximée (4.5) et sont proches des performances obtenues quand le canal est parfaitement connu. Nous notons aussi que le récepteur itératif converge plus rapidement quand le canal est connu.

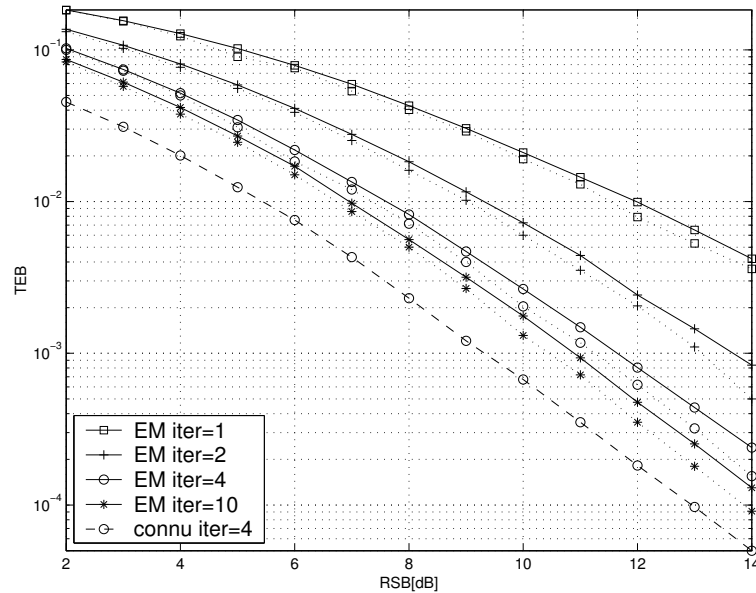


Fig. 4.4 : TEB en fonction du RSB pour $B_d T_s = 10^{-5}$ et une modulation MDP-2. Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal en considérant l'expression approximée (courbes en traits continus), des performances du récepteur itératif avec estimation de canal en utilisant l'expression exacte (courbes en pointillés) et des performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en traits discontinus)

Les figures 4.5 et 4.6, montrent le TEB en fonction du RSB de une à sept itérations du récepteur itératif, respectivement pour $B_d T_s = 10^{-3}$ et $B_d T_s = 10^{-5}$. La modulation utilisée est la MDP-4 (QPSK : Quadrature Phase Shift Keying). Les performances du récepteur itératif avec estimation de canal, utilisant l'expression approximée (4.5) (courbes en traits continus), sont comparées aux performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en pointillés). Nous remarquons que plus on augmente le nombre d'itérations de notre récepteur itératif, plus ses performances s'approchent de celles obtenues pour un canal parfaitement connu. De plus, les simulations montrent une saturation pour $B_d T_s = 10^{-3}$ à fort RSB (figure 4.5), cette saturation peut être expliquée par l'estimation initiale de canal qui n'est pas assez fiable.

D'après la figure 4.4, nous remarquons qu'il y a une perte en terme de TEB due à l'ap-

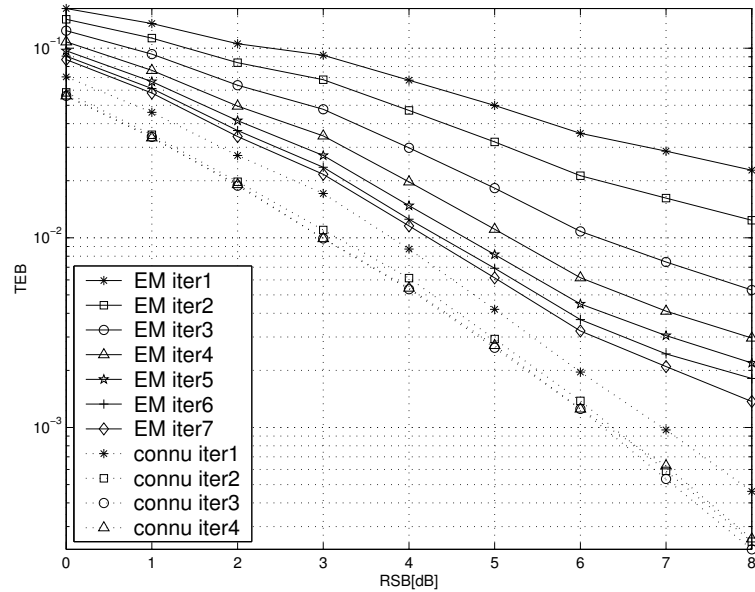


Fig. 4.5 : TEB en fonction du RSB pour $B_d T_s = 10^{-3}$ et une modulation MDP-4. Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits continus) et des performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en pointillés).

proximation faite dans (4.5). Dans ce qui suit, nous proposons d'utiliser un précodage pour minimiser la valeur quadratique moyenne du terme d'interférence négligé.

4.7 Récepteur itératif avec expression approximée de l'estimation de canal et précodage

Avant d'entamer cette partie, nous notons que plus la longueur d'un bloc N est grande plus le terme d'interférence est faible et le précodage n'est plus utile.

4.7.1 Principe du précodage

Dans le but de réduire l'erreur induite par l'élimination de l'interférence entre symboles dans l'expression approximée (4.5), nous proposons de minimiser la valeur quadratique moyenne du terme négligé en utilisant un précodeur placé avant la transmission des

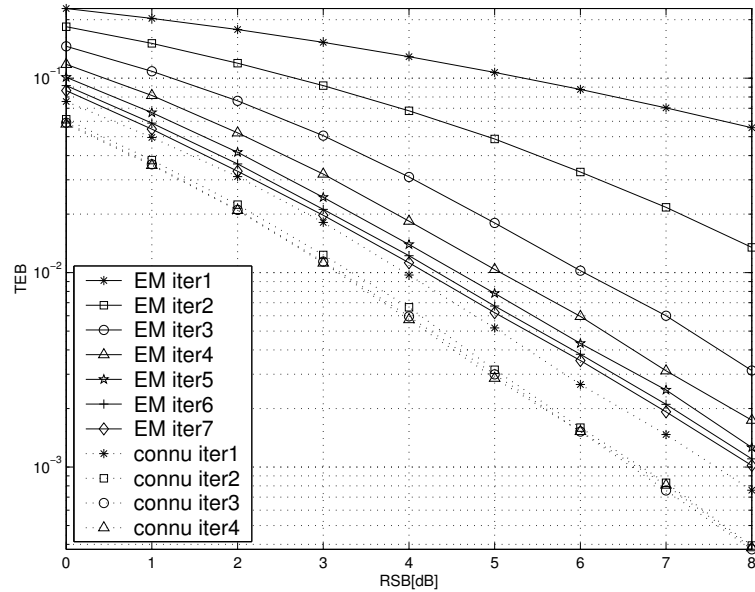


Fig. 4.6 : TEb en fonction du RSB pour $B_d T_s = 10^{-5}$ et une modulation MDP-4. Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l’expression approximée (courbes en traits continus) et des performances du récepteur avec une parfaite connaissance du canal (courbes en pointillés).

blocs de données (figure 4.1). Nous nous inspirons, pour ce faire des travaux sur le “selected mapping” utilisé pour réduire le PAPR dans les systèmes OFDM [32]. En effet, dans un système utilisant le “selected mapping”, chaque information codée est représentée avec un nombre fixe de séquences candidates et celle qui donne le plus petit PAPR est envoyée.

Le précodage a dans notre cas pour but de diminuer le terme d’interférence entre symboles. Cette interférence augmente lorsque la longueur des blocs N diminue. Le précodage consiste à transformer la séquence à émettre, en la multipliant par un ensemble de séquences candidates, en plusieurs séquences et à en transmettre celle qui donne la valeur quadratique moyenne minimale du terme négligé.

Au niveau de l’émetteur, nous considérons donc un ensemble de C séquences candidates pour le précodage, notées $\underline{E}^q = (e_0^q, e_1^q, \dots, e_{N-1}^q)^T$ (où $0 \leq q \leq C - 1$). Les symboles des séquences \underline{E}^q sont dans l’alphabet Ω , où $\Omega = \{-1, 1\}$ pour la MDP-2 et $\Omega = \{-j, +j, -1, +1\}$ pour la MDP-4. La séquence des symboles d’information à la sortie du modulateur est $\underline{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{N-1})^T$. La séquence \underline{E}^q est multiplié membre à membre avec \underline{P} donnant lieu aux séquences entrelacées $\underline{S}^q = (e_0^q P_0, e_1^q P_1, \dots, e_{N-1}^q P_{N-1})^T = (S_0^q, S_1^q, \dots, S_{N-1}^q)$ candidates à la transmission. Ainsi, pour chaque séquence \underline{P} , la séquence

$\underline{S} = \underline{S}^q$ donnant la plus petite valeur quadratique moyenne du terme négligé d'interférence entre symboles est sélectionnée pour la transmission. Pour cette raison, nous considérons la variable $\eta_{l,i}^{q,m}$ qui symbolise le terme contenant l'interférence entre symboles dans (4.3) :

$$\eta_{l,i}^{q,m} = \sum_{k=0}^{N-1} H_k^l S_{k-l}^q S_{k-i}^{q*} B_{mk}^*,$$

où $0 \leq l \leq L-1$, $0 \leq i \leq L-1$, $l \neq i$, $0 \leq q \leq C-1$ et $0 \leq m \leq N-1$.

La variance de $\eta_{l,i}^{q,m}$ est donnée par :

$$\text{var}(\eta_{l,i}^{q,m}) = \sum_{n=0}^{N-1} \Gamma_n^l \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_{k-l}^q S_{k-i}^{q*} B_{nk} B_{mk}^* \right|^2.$$

Pour comparer les séquences candidates, nous posons γ^q la moyenne des variances des termes $\eta_{l,i}^{q,m}$ correspondant à tous les trajets l et i et tous les éléments m des vecteurs $\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$:

$$\begin{aligned} \gamma^q &= \frac{1}{L(L-1)N} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0, l \neq i}^{L-1} \text{var}(\eta_{l,i}^{q,m}) \\ &= \frac{1}{L(L-1)N} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0, l \neq i}^{L-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Gamma_n^l \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_{k-l}^q S_{k-i}^{q*} B_{nk} B_{mk}^* \right|^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

En introduisant le vecteur $\underline{V}_{l,i,n}^q = (V_{l,i,n,0}^q, \dots, V_{l,i,n,N-1}^q)^T$, avec $V_{l,i,n,k}^q = S_{k-l}^q S_{k-i}^{q*} B_{nk}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \gamma^q &= \frac{1}{L(L-1)N} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0, l \neq i}^{L-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Gamma_n^l |\langle \underline{B}_m, \underline{V}_{l,i,n}^q \rangle|^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{L(L-1)N} \sum_{i=0}^{L-1} \left[\sum_{l=0, l \neq i}^{L-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Gamma_n^l \|\underline{V}_{l,i,n}^q\|^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous nous plaçons dans le cas où $NB_d T_s \ll 1$. Dans ce cas $\Gamma_n^l \ll \Gamma_0^l$ pour tout $n \neq 0$ nous pouvons écrire :

$$\gamma^q \simeq \frac{1}{L(L-1)N} \sum_{i=0}^{L-1} \left[\sum_{l=0, l \neq i}^{L-1} \left(\Gamma_0^l \|V_{l,i,0}^q\|^2 \right) \right]. \quad (4.6)$$

Dans le but de réduire l'effet du terme d'interférence entre symboles négligé, nous proposons de minimiser l'expression (4.6). Cette expression dépend du spectre Doppler du canal. Pour simplifier le problème, nous commençons par considérer le cas simple du canal sélectif en fréquence et non sélectif en temps ($B_d = 0$). Ensuite, la solution obtenue sera utilisée pour le canal sélectif en temps et en fréquence avec $B_d T_s \ll 1$. Lorsque nous considérons un canal sélectif en fréquence et non sélectif en temps, pour tout $0 \leq k \leq N-1$, $B_{0k} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ est une constante indépendante de k . Ainsi, dans le cas d'un canal non sélectif en temps, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \gamma^q &\simeq \frac{1}{L(L-1)N} \sum_{i=0}^{L-1} \left[\sum_{l=0, l \neq i}^{L-1} \left(\Gamma_0^l \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_{k-l}^q S_{k-i}^{q*} \right|^2 \right) \right] \\ &\propto \sum_{i=0, l=0, l \neq i}^{L-1} \phi^l(0) (R_q(l-i))^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

où $R_q(l-i) = \sum_{k=0}^{N-1} S_{k-l}^q S_{k-i}^{q*}$. Ainsi, nous proposons la méthode de précodage suivante pour les canaux à évanouissements lents ($B_d T_s \ll 1$). Pour chaque séquence d'entrée, l'ensemble des précodeurs utilisés génèrent des séquences \underline{S}^q . Ensuite, l'expression (4.7) est évaluée pour chaque séquence \underline{S}^q . Finalement, la séquence donnant la valeur minimale de (4.7) sera sélectionnée pour transmission à travers le canal. Au niveau du récepteur, le signal reçu sera corrélé avec les C séquences candidates pour le précodage \underline{E}_q pour connaître la séquence choisie par l'émetteur.

4.7.2 Résultats des simulations

Les bits d'information à l'entrée du codeur sont codés en utilisant les mêmes conditions que dans le cas de la section 4.6.2, à savoir un code convolutif de rendement 1/2 et de polynômes générateurs (7,5) en octal. La modulation est la MDP-2.

Nous évaluons les performances du récepteur itératif pour des blocs de $N = 30$ symboles (pour avoir une interférence plus aigue et par la suite un précodage plus intéressant), un canal de longueur $L = 3$. La séquence d'apprentissage CAZAC [34] est placée au milieu de chaque bloc et est composée de 4 symboles cycliquement étendus à $(2L)$ symboles.

Nous considérons $C = 4$ séquences \underline{E}^q candidates pour le précodage. Pour chaque bloc, la séquence candidate \underline{S}^q minimisant (4.7) est sélectionnée et transmise à travers le canal. Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 montrent le TEB en fonction du RSB moyen reçu ($RSB = \sum_{l=0}^{L-1} \phi^l(0) E_s/\sigma^2$), pour quelques itérations du récepteur itératif, respectivement pour un canal fixe en temps et sélectif en fréquence ($B_d = 0$), un canal sélectif en temps et en fréquence où $B_d T_s = 10^{-5}$ et un canal sélectif en temps et en fréquence où $B_d T_s = 10^{-3}$. Dans les simulations, par soucis de simplicité, nous limitons le nombre des vecteurs propres à $K = 1$ vecteur quand $B_d T_s = 10^{-5}$ et $K = 2$ vecteurs quand $B_d T_s = 10^{-3}$ (voir la section 4.4 de ce chapitre). Les performances du récepteur itératif utilisant l'approche approximée de l'estimation de canal (courbes en traits discontinus) sont comparées aux performances du récepteur itératif combinant le précodage et l'approche approximée de l'estimation de canal (courbes en traits continus). Dans les trois figures, les performances du récepteur itératif avec un canal parfaitement connu à la 4^{ème} itération sont représentées à titre de référence (courbes en pointillés). Sur la figure 4.8, nous présentons, en plus, les performances du récepteur itératif utilisant l'approche exacte de l'estimation de canal (courbes en pointillés rouge) qui sont presque identiques aux performances de l'algorithme approximé avec précodage. Nous remarquons que pour $TEB=3.10^{-4}$, l'utilisation du précodage apporte un gain de 0.5 dB pour le canal sélectif en fréquence et non sélectif en temps et un gain de 0.35 dB pour le canal sélectif en temps et en fréquence, où $B_d T_s = 10^{-5}$. Nous notons que ce gain diminue quand le canal est plus sélectif en temps ($B_d T_s = 10^{-3}$).

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré une transmission codée à travers un canal sélectif en temps et en fréquence. Nous avons représenté convenablement le canal discret sur chaque bloc et chaque trajet, en utilisant le théorème de KL [37]. Pour estimer les paramètres de cette représentation, nous avons proposé une estimation itérative du canal suivant le critère MAP et utilisant l'algorithme EM [10]. Nous avons proposé d'intégrer cet algorithme d'estimation de canal dans un récepteur itératif constitué d'un égaliseur MAP et d'un décodeur MAP. Dans ce récepteur itératif, l'algorithme EM utilise les probabilités *a posteriori* sur les bits codés fournies par le décodeur. L'algorithme obtenu est complexe à réaliser puisque chaque itération est faite en L étapes correspondant aux L trajets du canal. Pour réduire la complexité de l'approche exacte de l'algorithme EM, nous avons

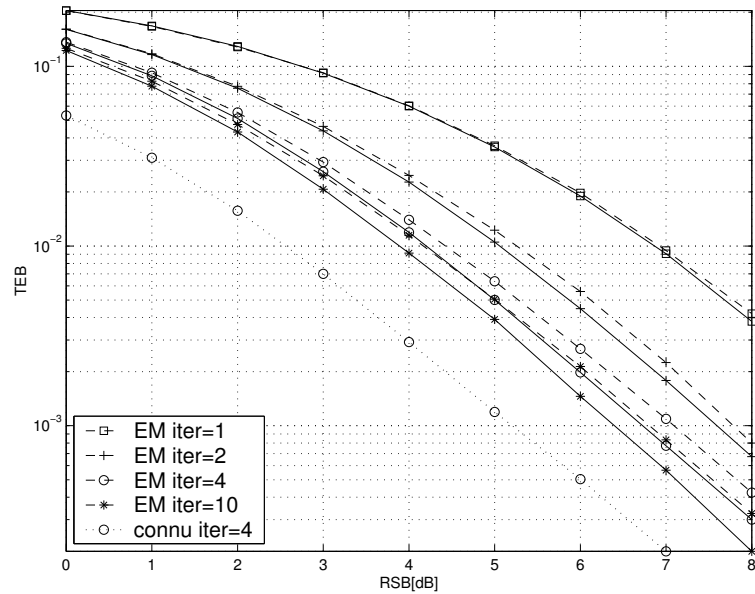


Fig. 4.7 : TEB en fonction du RSB : Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits discontinus) et avec précodage et estimation de canal (courbes en traits continus) et avec une connaissance parfaite de canal (courbes en pointillés) pour un canal sélectif en fréquence (non sélectif en temps)

proposé une version approximée en négligeant le terme d'interférence entre symboles. Puis, dans le but de réduire l'erreur causée par l'élimination de ce terme, nous avons proposé de précoder la séquence d'information pour minimiser la valeur quadratique moyenne du terme négligé. Les simulations ont montré que l'utilisation du précodeur mène à une amélioration des performances du turbo-détecteur, à fort RSB. Le gain en performance est important lorsque la taille des blocs est petite et le canal est à évanouissements lents.

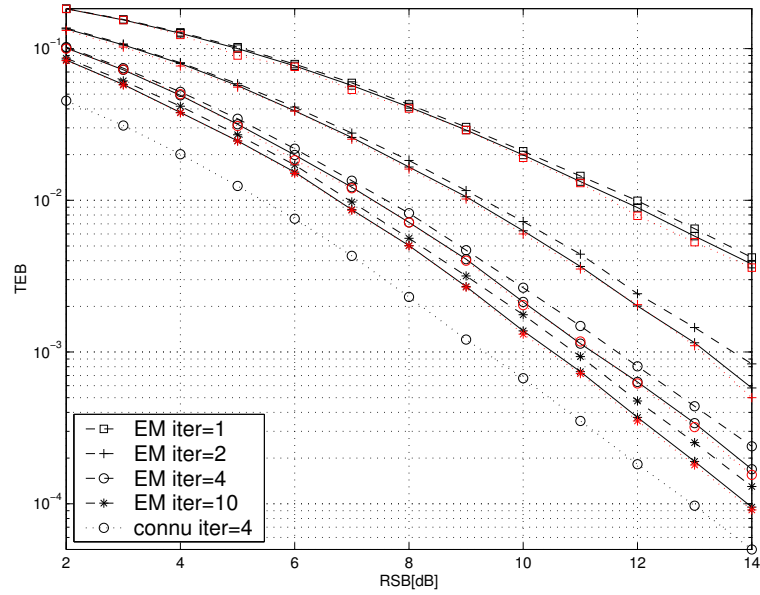


Fig. 4.8 : TEB en fonction du RSB : Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits discontinus), avec précodage et estimation de canal (courbes en traits continus), avec l'estimation exacte de canal (courbes en pointillés) et avec une connaissance parfaite de canal (courbes en pointillés rouge) pour un canal sélectif en temps et en fréquence ($B_d T_s = 10^{-5}$)

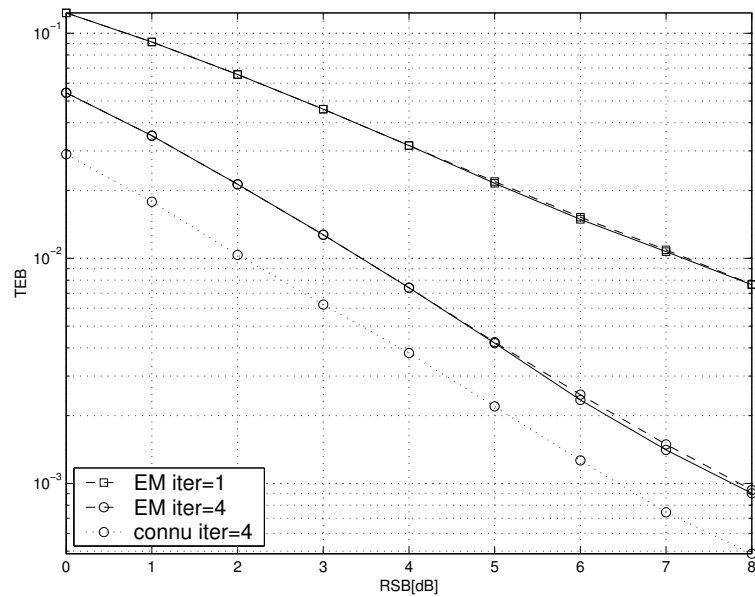


Fig. 4.9 : TEB en fonction du RSB : Comparaison des performances du récepteur itératif avec estimation de canal utilisant l'expression approximée (courbes en traits discontinus) et avec précodage et estimation de canal (courbes en traits continus) et avec une connaissance parfaite de canal (courbes en pointillés) pour un canal sélectif en temps et en fréquence ($B_d T_s = 10^{-3}$)

Conclusion et perspectives

Les systèmes de télécommunications promettent d'offrir une grande variété de services. Ceci demande de garantir une transmission fiable à une large bande et à des débits élevés. Pour ce faire, il faut utiliser des techniques de modulation/démodulation et de codage/décodage efficaces tout en assurant que le récepteur récupère l'information émise avec un minimum d'erreurs. De plus, vu que les canaux sont généralement sélectifs en fréquence, nous devons combattre de manière efficace l'effet des interférences entre symboles. Pour cela un détecteur doit être utilisé.

Dans cette thèse, nous avons considéré à l'émission les modulations codées à entrelacement aléatoire de bits (BICM : Bit Interleaved Coded Modulation). C'est un schéma de modulation codée obtenu par la concaténation d'un codeur binaire et d'un modulateur séparés par un entrelaceur bit [49]. Nous avons considéré au niveau du récepteur un turbo-détecteur selon l'idée des turbo-codes [4, 38]. Ce turbo-détecteur est formé par un égaliseur et un décodeur basés sur le critère Maximum *A Posteriori* (MAP).

Nous nous sommes intéressés au problème du choix du mapping dans ce contexte. Ainsi, dans le chapitre 2, nous avons étudié l'optimisation du choix du mapping dans le cas d'un turbo-détecteur pour des canaux sélectifs en fréquence, constants ou Rayleigh par blocs et connus au niveau du récepteur. Pour ce faire, nous avons effectué une étude analytique de l'impact des informations *a priori* fournies par le décodeur sur les performances de l'égaliseur MAP dans le cas des modulations d'ordres élevés. Nous avons calculé des approximations analytiques de la probabilité d'erreur binaire (PEB) à la sortie de l'égaliseur MAP alimenté par les informations *a priori* provenant du décodeur modélisées par des variables aléatoires gaussiennes. Nous avons justifié cette approximation gaussienne analytiquement et par simulation. Nous avons ensuite proposé de trouver le mapping minimisant l'approximation analytique de la PEB quand les informations *a priori* provenant du décodeur sont fiables (à fort RSB). Nous avons trouvé que ce mapping correspond à éloigner le plus possible les symboles différents d'un seul bit contrairement

au mapping de Gray. Etant donné que la recherche exhaustive d'un tel mapping peut être complexe quand la taille de la modulation est élevée, nous avons proposé d'utiliser l'algorithme BSA pour approcher la solution. Puisque l'optimisation du choix du mapping a été effectuée à fort RSB, nous avons proposé d'adapter le mapping selon le Rapport Signal à Bruit (RSB) de la transmission.

Vu qu'en pratique, le canal n'est pas connu au niveau du récepteur et doit être estimé, nous avons étendu, dans le chapitre 3, l'étude de l'optimisation du mapping au cas d'un canal estimé constant durant la transmission. Nous avons analysé les performances de l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* provenant du décodeur MAP en plus des observations et de l'estimation du canal. Nous avons donné des approximations de la PEB à la sortie de l'égaliseur alimenté par des LRVs *a priori* gaussiens. Nous avons proposé d'utiliser l'algorithme BSA pour trouver le mapping minimisant l'expression analytique de la PEB trouvée quand les informations *a priori* sont fiables. L'expression à minimiser étant plus complexe que dans le cas du canal connu (chapitre 2), nous étions contraints de fixer les conditions de simulations avant d'exécuter l'algorithme BSA.

Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés à l'estimation des canaux sélectifs en temps et en fréquence. Nous avons proposé d'estimer itérativement selon le critère MAP le canal sélectif en temps et en fréquence en utilisant l'algorithme Expectation-Maximization (EM) [10]. Pour faciliter l'estimation, nous avons représenté convenablement le canal discret sur chaque bloc en utilisant le théorème d'expansion orthogonale de Karhunen-Loève (KL) [37]. Nous avons intégré l'algorithme d'estimation de canal dans le récepteur itératif utilisant un égaliseur MAP et un décodeur MAP. L'algorithme obtenu est complexe à réaliser puisque chaque itération comporte L étapes correspondant aux L trajets du canal. Pour réduire la complexité de l'approche exacte de l'algorithme EM, nous avons proposé une version approximée en négligeant le terme d'interférence entre symboles. Puis, dans le but de réduire l'erreur causée par l'élimination de ce terme, nous avons proposé de précoder la séquence d'information pour minimiser la valeur quadratique moyenne du terme négligé. Les simulations ont montré que l'utilisation du précodeur mène à une amélioration des performances du turbo-détecteur, à fort RSB. Le gain en performance est important lorsque la taille des blocs est petite et le canal est à évanouissements lents.

Comme perspectives de ce travail, nous proposons dans le futur d'étudier les points suivants :

- Dans le chapitre 2, nous avons optimisé le choix du mapping quand un turbo-détecteur est utilisé et les informations *a priori* sont fiables. Nous proposons dans le

futur de généraliser notre étude au cas où les informations *a priori* sont moins fiables.

- Nous avons supposé dans le chapitre 3 que le canal estimé est constant au cours de la transmission. Nous proposons dans le futur de généraliser notre étude au cas où le canal est quasi-stationnaire constant sur un bloc et pouvant changer indépendamment d'un bloc à l'autre. De plus, nous pourrions envisager d'optimiser le choix de la taille et de la nature de la séquence d'apprentissage.

- Dans le quatrième chapitre, nous avons considéré le précodage pour le cas de canaux peu sélectifs en temps. Nous pourrions développer un précodage pour le cas des canaux à évanouissements rapides.

Annexe A

Distribution des LRVs *a posteriori* : Cas d'un canal BABG non sélectif.

Nous considérons une transmission de symboles modulés suivant une Modulation à Déplacement de Phase d'ordre 8 (MDP-8) avec un mapping de Gray (figure (2.3)) à travers un canal à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) non sélectif en fréquence. Nous proposons de déterminer la distribution des Logarithmes de Rapport de Vraisemblance (LRVs) *a posteriori* à la sortie du démodulateur. Nous supposons que le démodulateur n'a pas d'informations *a priori* à son entrée.

La sortie du canal échantillonnée à l'instant k est :

$$r_k = s_k + w_k,$$

où s_k sont les symboles transmis et w_k sont les échantillons indépendants d'un canal BABG de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Nous notons les trois bits d'un symbole dans l'ordre en partant de la gauche $\tilde{b}_0\tilde{b}_1\tilde{b}_2$. Nous divisons les symboles dans deux sous-ensembles de symboles : $E_1 = \{000, 010, 100, 110\}$ (figure A.1a) et $E_2 = \{001, 011, 101, 111\}$ (figure A.1b). Nous considérons que l'énergie symbole moyenne est $E_s = 1$.

L'expression des LRVs *a posteriori* sur le bit \tilde{b}_i , $i \in \{0, 1, 2\}$, est alors donnée par :

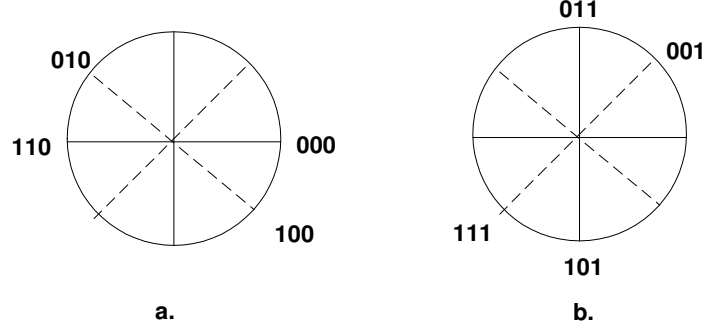


Fig. A.1 : a. Symboles de l'ensemble E1 b. Symboles de l'ensemble E2

$$\begin{aligned}
 LRV(\tilde{b}_i) &= \ln \left(\frac{\sum_{s_k \in S_1} p(r_k | s_k)}{\sum_{s_k \in S_{-1}} p(r_k | s_k)} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{\sum_{s_k \in S_1} \exp\left(-\frac{|r_k - s_k|^2}{2\sigma^2}\right)}{\sum_{s_k \in S_{-1}} \exp\left(-\frac{|r_k - s_k|^2}{2\sigma^2}\right)} \right), \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

où S_a représente l'ensemble des symboles correspondant à $\tilde{b}_i = a$ avec $a \in \{-1, 1\}$.

Nous commençons par supposer que $i = 0$ et $\tilde{b}_0 = 1$. Nous supposons que le signal émis est $\tilde{s}_4 = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$ correspondant aux bits 100. Dans ce cas, à fort RSB, le symbole le plus proche de r_k avec $\tilde{b}_0 = 1$ est \tilde{s}_4 et avec $\tilde{b}_0 = 0$ est $\tilde{s}_0 = 1$ (correspondant aux bits 000). Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 LRV(\tilde{b}_0) &\simeq \ln \left(\frac{\exp\left(-\frac{|r_k - \tilde{s}_4|^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{|r_k - \tilde{s}_0|^2}{2\sigma^2}\right)} \right) \\
 &\simeq \frac{|r_k - \tilde{s}_0|^2 - |r_k - \tilde{s}_4|^2}{2\sigma^2} \\
 &\simeq \frac{1}{\sigma^2} \text{Re} \langle r_k, \tilde{s}_4 - \tilde{s}_0 \rangle,
 \end{aligned}$$

où $\tilde{s}_4 - \tilde{s}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) - j\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, si le symbole, \tilde{s}_4 est émis, la distribution des LRVs *a posteriori* est une gaussienne de moyenne $\frac{1}{4\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$ et de variance $\frac{1}{2\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$. Ceci reste vrai si le symbole $110 \in E_1$ est émis.

Nous supposons maintenant que le symbole émis est \tilde{s}_5 représenté par 101. A fort RSB, on peut montrer de la même manière que :

$$LRV(\tilde{b}_0) \simeq \frac{1}{\sigma^2} Re \langle r_k, \tilde{s}_5 - \tilde{s}_1 \rangle ,$$

où \tilde{s}_1 est le symbole correspondant à 001. La distribution des LRVs *a posteriori* est alors une gaussienne de moyenne $\frac{1}{2\sigma^2}$ et de variance $\frac{1}{\sigma^2}$.

Ceci reste vrai si le symbole 111 est émis. Le problème est symétrique quand $\tilde{b}_0 = 0$. Donc, la distribution des LRVs relatif au bit \tilde{b}_0 est un mélange équitale de deux gaussiennes de moyennes $\frac{\tilde{b}_0}{4\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$ et $\frac{\tilde{b}_0}{2\sigma^2}$ et de variances respectives $\frac{1}{2\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$ et $\frac{1}{\sigma^2}$. Nous pouvons généraliser ce raisonnement pour les autres bits. Nous montrons donc que la distribution des LRVs relatif aux bits \tilde{b}_1 est un mélange équitale de deux gaussiennes de moyennes $\frac{\tilde{b}_1}{4\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$ et $\frac{\tilde{b}_1}{2\sigma^2}$ et de variances respectives $\frac{1}{2\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$ et $\frac{1}{\sigma^2}$. Nous montrons aussi que la distribution des LRVs relatif aux bits \tilde{b}_2 est une gaussienne de moyenne $\frac{\tilde{b}_2}{4\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$ et de variance $\frac{1}{2\sigma^2} (2 - \sqrt{2})$.

Annexe B

Calcul de la probabilité d'erreur par paire pour un canal connu

Nous supposons que les LRVs *a priori* à l'entrée de l'égaliseur sont des échantillons indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) d'une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance $\sigma_{eq,in}^2$. Tout se passe comme si ces LRVs sont calculés à partir d'observations *a priori* sur les bits $\tilde{b}_l = 2b_l - 1$, pour $q(1-L) \leq l \leq qN - 1$ données par :

$$z_l = \tilde{b}_l + w_l,$$

où les bits \tilde{b}_l pour $q(1-L) \leq l \leq -1$ sont des bits virtuels connus du récepteur et peuvent être considérés nuls, w_l sont des échantillons i.i.d. d'une variable aléatoire avec une ddp gaussienne de la forme $N(0, \sigma_{eq,in}^2)$. Les LRVs *a priori* à l'entrée de l'égaliseur MAP sont :

$$LRV(b_l) = \log \frac{P(z_l | \tilde{b}_l = 1)}{P(z_l | \tilde{b}_l = -1)} = \frac{2}{\sigma_{eq,in}^2} z_l.$$

Ainsi, ces LRVs peuvent être modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne de la forme $N\left(\frac{2\tilde{b}_l \sqrt{E_b^c}}{\sigma_{eq,in}^2}, \frac{4\sqrt{E_b^c}}{\sigma_{eq,in}^2}\right)$.

Nous rappelons que le vecteur complexe à la sortie du canal $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{N_b-1})^T$ de dimension $N_b \times 1$ est défini par :

$$\underline{x} = \underline{\underline{H}}s + \underline{n},$$

où $\underline{\underline{H}}$ est la matrice Toeplitz du canal de dimension $N_b \times (N_b + L - 1)$ avec sa première

ligne égale à $(h_0, h_1, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0)$ et sa première colonne $(h_0, 0, \dots, 0)^T$, $\underline{s} = (s_{1-L}, \dots, s_{N_b-1})^T$ est le vecteur des symboles transmis de taille $(N_b + L - 1) \times 1$ et $\underline{n} = (n_0, \dots, n_{N_b-1})^T$ est le vecteur de bruit complexe avec les n_i sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne de la forme $N_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$.

Le vecteur des observations *a priori* sur les bits transmis est $\underline{z} = (z_{q(1-L)}, \dots, z_{qN_b-1})^T$ défini par :

$$\underline{z} = \tilde{\underline{b}} + \underline{w},$$

où $\underline{w} = (w_{q(1-L)}, \dots, w_{qN_b-1})^T$ et $\tilde{\underline{b}} = (\tilde{b}_{q(1-L)}, \dots, \tilde{b}_{qN_b-1})$.

En tenant compte des informations *a priori*, la probabilité *a posteriori* de la séquence \underline{s} est donnée par :

$$P(\underline{s}|\underline{x}, \underline{z}) \propto \exp\left(-\frac{\|\underline{x} - \underline{H}\underline{s}\|^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\|\underline{z} - \tilde{\underline{b}}\|^2}{2\sigma_{eq,in}^2}\right).$$

Nous considérons un événement d'erreur [3, 16]. Soient \underline{s}_e le vecteur des symboles transmis, $\hat{\underline{s}}_e$ le vecteur des symboles estimés, \underline{b}_e le vecteur des bits transmis et $\hat{\underline{b}}_e$ le vecteur des bits estimés correspondants à l'événement d'erreur. Nous voulons calculer $P_{\underline{b}_e, \hat{\underline{b}}_e}$ qui est la probabilité que $\hat{\underline{b}}_e$ soit meilleur que \underline{b}_e dans le sens du critère MAP séquence. Ceci est équivalent à l'événement ξ_e :

$$\left\| \underline{x}_e - \underline{H}_e \hat{\underline{s}}_e \right\|^2 + \frac{\sigma^2}{2\sigma_{eq,in}^2} \left\| \underline{z}_e - \hat{\underline{b}}_e \right\|^2 \leq \left\| \underline{x}_e - \underline{H}_e \underline{s}_e \right\|^2 + \frac{\sigma^2}{2\sigma_{eq,in}^2} \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e \right\|^2, \quad (\text{B.1})$$

où \underline{x}_e , \underline{z}_e et \underline{H}_e sont respectivement le sous-vecteur de \underline{x} , \underline{z} et le bloc de \underline{H} correspondant à l'événement d'erreur.

Posons $\underline{e} = \hat{\underline{s}}_e - \underline{s}_e$ le vecteur d'erreur symbole. Nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{x}_e - \underline{H}_e \hat{\underline{s}}_e \right\|^2 - \left\| \underline{x}_e - \underline{H}_e \underline{s}_e \right\|^2 &= \left\| \underline{x}_e - \underline{H}_e \underline{s}_e - \underline{H}_e \underline{e} \right\|^2 - \left\| \underline{x}_e - \underline{H}_e \underline{s}_e \right\|^2 \\ &= \left\| \underline{H}_e \underline{e} \right\|^2 - 2\text{Re}(\langle \underline{x}_e - \underline{H}_e \underline{s}_e, \underline{H}_e \underline{e} \rangle) \\ &= \left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 - 2\text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où $\underline{d}(\underline{e}) = \underline{H}_e \underline{e}$ et \underline{n}_e le sous vecteur de \underline{n} correspondant à l'événement d'erreur. Posons

$\underline{e}_b = \widehat{\underline{b}}_e - \underline{b}_e$ le vecteur d'erreur bit. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{z}_e - \widehat{\underline{b}}_e \right\|^2 - \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e \right\|^2 &= \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e - \underline{e}_b \right\|^2 - \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e \right\|^2 \\ &= \left\| \underline{e}_b \right\|^2 - 2 \langle \underline{z}_e - \underline{b}_e, \underline{e}_b \rangle \\ &= \left\| \underline{e}_b \right\|^2 - 2 \langle \underline{w}_e, \underline{e}_b \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où \underline{w}_e le sous vecteur de \underline{w} correspondant à l'événement d'erreur.

En tenant compte des équations (B.1), (B.2) et (B.3), nous trouvons :

$$\xi_e : \left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \left\| \underline{e}_b \right\|^2 \leq 2 \text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle) + \mu_{eq,in}^2 \langle \underline{w}_e, \underline{e}_b \rangle,$$

où $\mu_{eq,in} = \frac{\sigma}{\sigma_{eq,in}}$.

Soit $\chi = 2 \text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle) + \mu_{eq,in}^2 \langle \underline{w}_e, \underline{e}_b \rangle$. Nous pouvons écrire que $\chi \sim N(0, 2\sigma^2 (\left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \left\| \underline{e}_b \right\|^2))$. Ainsi, la probabilité d'erreur par paire que l'égaliseur choisisse $\widehat{\underline{b}}_e$ au lieu de \underline{b}_e est donnée par :

$$P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e} = Q \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \left\| \underline{e}_b \right\|^2} \right).$$

où $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$.

Posons $m(\underline{e}_b)$ le nombre des bits erronés. Le vecteur \underline{e}_b possède $m(\underline{e}_b)$ composants égaux à $\pm 2\sqrt{E_b^c}$ et les autres sont égaux à zéro. Ainsi, nous pouvons remplacer $\left\| \underline{e}_b \right\|^2$ par $4m(\underline{e}_b)E_b^c$ et nous obtenons :

$$P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e} = Q \left(\frac{\sqrt{\left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 + 2m(\underline{e}_b)\mu_{eq,in}^2 E_b^c}}{\sqrt{2}\sigma} \right).$$

Annexe C

Calcul de la distribution de l'énergie d'un canal de Rayleigh par blocs

Les coefficients du canal h_i sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d. avec une ddp gaussienne de la forme $N_{\mathbb{C}}(0, \sigma_i^2)$ où $\sum_{i=0}^{L-1} |\sigma_i|^2 = 1$ et $N_{\mathbb{C}}(\alpha, \sigma^2)$ représente une distribution gaussienne complexe de moyenne α et de variance σ^2 . Ainsi, $Y = \|\underline{h}\|^2 = \sum_{i=0}^{L-1} |h_i|^2$ est la somme de L variables aléatoires ayant une distribution χ_2 . Nous notons par $Y_i = |h_i|^2$, pour $0 \leq i \leq L - 1$, sa distribution est :

$$p_{Y_i}(y) = \frac{1}{2\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_i^2}\right).$$

On considère la fonction caractéristique de Y_i :

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(u) &= \int_0^{\infty} \exp(juy) \frac{1}{2\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_i^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\sigma_i^2} \int_0^{\infty} \exp\left(y\left(ju - \frac{1}{2\sigma_i^2}\right)\right) dy \\ &= \frac{1}{2\sigma_i^2} \left[\frac{\exp\left(y\left(ju - \frac{1}{2\sigma_i^2}\right)\right)}{ju - \frac{1}{2\sigma_i^2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{2\sigma_i^2} \frac{1}{ju - \frac{1}{2\sigma_i^2}} \\ &= \frac{1}{1 - j2\sigma_i^2 u}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction caractéristique de Y est :

$$\begin{aligned} F_Y(u) &= \prod_{i=0}^{L-1} F_{Y_i}(u) \\ &= \prod_{i=0}^{L-1} \frac{1}{1 - j2\sigma_i^2 u}. \end{aligned}$$

Nous allons chercher la décomposition en éléments simples de l'expression obtenue sous la forme $\sum_{i=0}^{L-1} \frac{\alpha_i}{1 - j2\sigma_i^2 u}$. Pour k donné :

$$\prod_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{1}{1 - j2\sigma_i^2 u} = \sum_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{\alpha_i (1 - j2\sigma_k^2 u)}{1 - j2\sigma_i^2 u} + \alpha_k. \quad (\text{C.1})$$

Nous supposons que toutes les variances des coefficients du canal sont différentes. Pour la valeur particulière de $u = \frac{1}{j2\sigma_k^2}$, l'équation (C.1) devient :

$$\prod_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{1}{1 - \frac{j2\sigma_i^2}{j2\sigma_k^2}} = \alpha_k.$$

Nous obtenons :

$$\alpha_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 - \sigma_i^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F_Y(u) &= \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\alpha_i}{1 - j2\sigma_i^2 u} \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i F_{Y_i}(u). \end{aligned}$$

La distribution de Y est alors :

$$p_Y(y) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\alpha_i}{2\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_i^2}\right).$$

Remarque 5 Pour le cas particulier avec deux variances de deux coefficients du canal qui sont égales σ_{k1}^2 et σ_{k2}^2 et toutes les autres sont différentes, prenons $u = \frac{1}{j2\sigma_k^2}$, avec

$0 \leq k \leq L - 1$ et $k \notin \{k_1, k_2\}$, l'équation (C.1) devient :

$$\prod_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{1}{1 - \frac{j2\sigma_i^2}{j2\sigma_k^2}} = \alpha_k.$$

Alors :

$$\alpha_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{L-1} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 - \sigma_i^2}, \text{ pour } k \notin \{k_1, k_2\}$$

Pour la valeur particulière de $u = \frac{1}{j2\sigma_{k_1}^2}$, l'équation (C.1) devient :

$$\prod_{i=0}^{L-1} \frac{1}{1 - \frac{j2\sigma_i^2}{j2\sigma_{k_1}^2}} = \alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}.$$

$$i \notin \{k_1, k_2\}$$

Ainsi :

$$\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} = \prod_{i=0}^{L-1} \frac{\sigma_{k_1}^2}{\sigma_{k_1}^2 - \sigma_i^2}$$

$$i \notin \{k_1, k_2\}$$

et la distribution de Y est alors :

$$p_Y(y) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin \{k_1, k_2\}}}^{L-1} \frac{\alpha_k}{2\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_k^2}\right) + \frac{\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2}}{2\sigma_{k_1}^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_{k_1}^2}\right).$$

Ce calcul peut s'étendre de la même manière pour le cas où plusieurs variances sont égales.

Annexe D

Calcul de la probabilité d'erreur par paire pour un canal estimé

Nous rappelons que la sortie du canal durant un bloc est le vecteur complexe $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{N-1})^T$ défini par :

$$\underline{x} = \underline{H}\underline{s} + \underline{n},$$

où \underline{H} est la matrice de Toeplitz de dimensions $N \times (N + L - 1)$ avec une première ligne $(h_0, h_1, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0)$ et une première colonne $(h_0, 0, \dots, 0)^T$, $\underline{s} = (s_{1-L}, \dots, s_{N-1})^T$ est le vecteur des symboles transmis et $\underline{n} = (n_0, \dots, n_{N-1})^T$ est le vecteur représentant un BABG complexe de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Le vecteur réel des observations *a priori* $\underline{z} = (z_{q(1-L)}, \dots, z_{qN-1})^T$ sur les bits $\tilde{b}_l = 2b_l - 1$, pour $q(1-L) \leq l \leq qN - 1$ est défini par :

$$\underline{z} = \tilde{\underline{b}} + \underline{w}, \tag{D.1}$$

où $\underline{w} = (w_{q(1-L)}, \dots, w_{qN-1})^T$ est un vecteur représentant un BABG complexe de moyenne nulle et de variance $\sigma_{eq,in}^2$ et $\tilde{\underline{b}} = (\tilde{b}_{q(1-L)}, \dots, \tilde{b}_{qN-1})^T$ est le vecteur des bits transmis.

En tenant compte des informations *a priori* et en utilisant l'estimation $\hat{\underline{h}}$ du canal au lieu de \underline{h} , la probabilité *a posteriori* de la séquence \underline{s} est donnée par :

$$P(\underline{s} | \underline{x}, \underline{z}, \underline{h} = \hat{\underline{h}}) \propto \exp\left(-\frac{\|\underline{x} - \hat{\underline{H}}\underline{s}\|^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\|\underline{z} - \tilde{\underline{b}}\|^2}{2\sigma_{eq,in}^2}\right),$$

où $\underline{\hat{H}}$ est la matrice de Toeplitz de dimension $N \times (N + L - 1)$ avec une première ligne $(\hat{h}_0, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{L-1}, 0, \dots, 0)$ et une première colonne $(\hat{h}_0, 0, \dots, 0)^T$.

Nous considérons maintenant un événement d'erreur. Soient \underline{b}_e le vecteur des bits transmis et $\underline{\hat{b}}_e$ le vecteur binaire estimé correspondant à l'événement d'erreur. Soient \underline{s}_e le vecteur des symboles transmis et $\underline{\hat{s}}_e$ le vecteur des symboles estimés correspondant à l'événement d'erreur. Nous voulons calculer $P_{\underline{b}_e, \underline{\hat{b}}_e}$ qui est la probabilité que $\underline{\hat{b}}_e$ soit meilleur que \underline{b}_e dans le sens du critère MAP séquence. Ceci est équivalent à l'événement ξ_e :

$$\left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{\hat{s}}_e \right\|^2 + \frac{\sigma^2}{2\sigma_{eq,in}^2} \left\| \underline{z}_e - \underline{\hat{b}}_e \right\|^2 \leq \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e \right\|^2 + \frac{\sigma^2}{2\sigma_{eq,in}^2} \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e \right\|^2, \quad (\text{D.2})$$

où \underline{x}_e , \underline{z}_e et $\underline{\hat{H}}_e$ sont respectivement les sous-vecteurs de \underline{x} , \underline{z} et le bloc de $\underline{\hat{H}}$ correspondant à l'événement d'erreur.

Posons $\underline{e} = \underline{\hat{s}}_e - \underline{s}_e$ le vecteur d'erreur symbole. Nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{\hat{s}}_e \right\|^2 - \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e \right\|^2 &= \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{e} \right\|^2 - \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e \right\|^2 \\ &= \left\| \underline{\hat{H}}_e \underline{e} \right\|^2 - 2\text{Re} \left(\left\langle \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e, \underline{\hat{H}}_e \underline{e} \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Comme montré dans [46] et pour des vecteurs d'erreur de longueurs finies, $\underline{\hat{H}}_e \underline{e}$ converge vers $\underline{H}_e \underline{e}$. Posons $\underline{d}(\underline{e}) = \underline{H}_e \underline{e}$, \underline{n}_e le sous-vecteur de \underline{n} correspondant à l'événement d'erreur et $\Delta \underline{H}_e = \underline{\hat{H}}_e - \underline{H}_e$. L'équation (D.3) devient :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{\hat{s}}_e \right\|^2 - \left\| \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e \right\|^2 &= \left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 - 2\text{Re} \left(\left\langle \underline{x}_e - \underline{\hat{H}}_e \underline{s}_e, \underline{H}_e \underline{e} \right\rangle \right) \\ &= \left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 - 2\text{Re} \left(\left\langle \underline{x}_e - \left(\Delta \underline{H}_e + \underline{H}_e \right) \underline{s}_e, \underline{H}_e \underline{e} \right\rangle \right) \\ &= \left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 - 2\text{Re} \left(\left\langle \underline{x}_e - \underline{H}_e \underline{s}_e, \underline{H}_e \underline{e} \right\rangle \right) \\ &\quad - 2\text{Re} \left(\left\langle - \left(\Delta \underline{H}_e \right) \underline{s}_e, \underline{H}_e \underline{e} \right\rangle \right) \\ &= \left\| \underline{d}(\underline{e}) \right\|^2 - 2\text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle) - 2\text{Re} \left(\left\langle - \left(\Delta \underline{H}_e \right) \underline{s}_e, \underline{d}(\underline{e}) \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Soit $\underline{M}_H(\underline{s}_e)$ la matrice de Hankel tel que $\underline{M}_H(\underline{s}_e) \Delta \underline{h}_e = \left(\Delta \underline{H}_e \right) \underline{s}_e$, où $\Delta \underline{h}_e = \underline{\hat{h}}_e - \underline{h}_e$. $\underline{\hat{h}}_e$ et \underline{h}_e sont les sous vecteurs respectifs de $\underline{\hat{h}}$ et \underline{h} correspondant à l'événement d'erreur.

Nous trouvons :

$$\left\| \underline{x}_e - \widehat{\underline{H}}_e \widehat{\underline{s}}_e \right\|^2 - \left\| \underline{x}_e - \underline{\widehat{H}}_e \underline{s}_e \right\|^2 = \|\underline{d}(\underline{e})\|^2 - 2\text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle) - 2\text{Re} \left(\left\langle -\underline{M}_H(\underline{s}_e) \Delta \underline{h}_e, \underline{d}(\underline{e}) \right\rangle \right). \quad (\text{D.4})$$

Posons $\underline{e}_b = \widehat{\underline{b}}_e - \underline{b}_e$ le vecteur d'erreur bit. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{z}_e - \widehat{\underline{b}}_e \right\|^2 - \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e \right\|^2 &= \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e - \underline{e}_b \right\|^2 - \left\| \underline{z}_e - \underline{b}_e \right\|^2 \\ &= \|\underline{e}_b\|^2 - 2 \langle \underline{z}_e - \underline{b}_e, \underline{e}_b \rangle \\ &= \|\underline{e}_b\|^2 - 2 \langle \underline{w}_e, \underline{e}_b \rangle, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

où \underline{w}_e est le sous-vecteur de \underline{w} correspondant à l'événement d'erreur. Nous obtenons, en utilisant (D.2), (D.4) et (D.5) :

$$\xi_e : \|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \|\underline{e}_b\|^2 \leq 2\text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle) + \mu_{eq,in}^2 \langle \underline{w}_e, \underline{e}_b \rangle + 2\text{Re} \left(\left\langle -\underline{M}_H(\underline{s}_e) \Delta \underline{h}_e, \underline{d}(\underline{e}) \right\rangle \right),$$

où $\mu_{eq,in} = \frac{\sigma}{\sigma_{eq,in}}$.

Soit $\chi = 2\text{Re}(\langle \underline{n}_e, \underline{d}(\underline{e}) \rangle) + \mu_{eq,in}^2 \langle \underline{w}_e, \underline{e}_b \rangle - 2\text{Re} \left(\left\langle \underline{M}_H(\underline{s}_e) \Delta \underline{h}_e, \underline{d}(\underline{e}) \right\rangle \right)$. Nous pouvons écrire que $\chi \sim N \left(0, 2\sigma^2 \left(\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \|\underline{e}_b\|^2 \right) + 2\sigma^2 \underline{d}(\underline{e})^T \underline{C}^{-1} \underline{d}(\underline{e}) L \right)$, où \underline{C} est la matrice de covariance de \underline{H}_L (définie dans la section 3.2). Ainsi, la probabilité d'erreur par paire que l'égaliseur choisisse $\widehat{\underline{b}}_e$ au lieu de \underline{b}_e peut être approximée par :

$$\begin{aligned} P_{\underline{b}_e, \widehat{\underline{b}}_e} &\simeq Q \left(\frac{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \|\underline{e}_b\|^2}{\sqrt{2\sigma^2 \left(\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \|\underline{e}_b\|^2 \right) + 2\sigma^2 \lambda L \|\underline{d}(\underline{e})\|^2}} \right) \\ &\simeq Q \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \|\underline{e}_b\|^2} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu_{eq,in}^2}{2} \frac{\|\underline{e}_b\|^2}{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2} \right)} L \lambda \right)^{-1/2} \right), \end{aligned}$$

puisque $\underline{d}(\underline{e})^t \underline{C}^{-1} \underline{d}(\underline{e}) \leq \lambda \|\underline{d}(\underline{e})\|^2$, où λ représente la plus grande valeur propre de la matrice \underline{C}^{-1} .

Soit $m(\underline{e}_b)$ le nombre des bits erronés. Le vecteur \underline{e}_b possède $m(\underline{e}_b)$ composants égaux à $\pm 2\sqrt{E_b^c}$ et les autres sont égaux à zéro. Ainsi, nous pouvons remplacer $\|\underline{e}_b\|^2$ par

$4m(\underline{e}_b)E_b^c$ et nous obtenons :

$$P_{\underline{b}_e, \hat{\underline{b}}_e} \simeq Q \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 2m(\underline{e}_b)\mu_{eq,in}^2 E_b^c} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2m(\underline{e}_b)\mu_{eq,in}^2 E_b^c}{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2}\right)} L\lambda \right)^{-1/2} \right).$$

Annexe E

Expression analytique de l'estimateur en utilisant l'algorithme EM

Nous cherchons à déterminer $G_m^{i(d+1)}$, le $m^{\text{ème}}$ élément de l'estimée de \underline{G}^i , à la $(d+1)^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme Expectation-Maximization (EM). Nous rappelons que l'estimée $\{\widehat{\underline{G}}^l\}_{l=0}^{L-1}$ au sens du critère Maximum *A Posteriori* (MAP) de $\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$ est définie par :

$$\{\widehat{\underline{G}}^l\}_{l=0}^{L-1} = \arg \max_{\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}} p\left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} | \underline{x}\right),$$

où $\underline{G}^l = (G_0^l, G_1^l, \dots, G_{N-1}^l)^T$, $l = 0, 1, \dots, L-1$ et $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{N-1})^T$ le vecteur des symboles reçus.

La solution peut être approchée de manière itérative en utilisant l'algorithme EM par la maximisation de la fonction auxiliaire Q . La fonction auxiliaire s'écrit :

$$Q\left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{\underline{G}^n\}_{l=0}^{L-1}\right) = \sum_{\underline{S}} \left[p\left(\underline{x}, \underline{S}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) \log p\left(\underline{x}, \underline{S}, \{\underline{G}^n\}_{l=0}^{L-1}\right) \right], \quad (\text{E.1})$$

où $\underline{S} = (S_0, \dots, S_{N-1})^T$ le vecteur des symboles transmis normalisés.

Tout d'abord, le terme en logarithme peut être exprimé par :

$$\log p\left(\underline{x}, \underline{S}, \{\underline{G}^n\}_{l=0}^{L-1}\right) = \log P(\underline{S}) + \log p\left(\{\underline{G}^n\}_{l=0}^{L-1}\right) + \log p\left(\underline{x} | \underline{S}, \{\underline{G}^n\}_{l=0}^{L-1}\right). \quad (\text{E.2})$$

Le premier terme est indépendant de $\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$. Le second terme est :

$$\begin{aligned} \log p\left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) &= \log\left(\prod_{l=0}^{L-1} \prod_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\pi \Gamma_m^l} \exp\left(-\frac{|\underline{G}_m^l|^2}{\Gamma_m^l}\right)\right) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left(-\log(\pi \Gamma_m^l) - \frac{|\underline{G}_m^l|^2}{\Gamma_m^l}\right), \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

où Γ_m^l sont les valeurs propres de la matrice de covariance $\underline{F}^l = E[\underline{H}^l (\underline{H}^l)^\dagger]$ (\underline{H}^l le $l^{\text{ème}}$ vecteur normalisé du canal discret). Le dernier terme est :

$$\begin{aligned} \log p\left(\underline{x} | \underline{S}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) &= \log\left(\prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\pi \sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \left|x_k - \left(\sum_{l=0}^{L-1} H_k^l S_{k-l}\right)\right|^2\right)\right) \\ &= -N \log(\pi \sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left|x_k - \left(\sum_{l=0}^{L-1} H_k^l S_{k-l}\right)\right|^2\right), \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

où σ^2 est la variance du bruit du canal.

En remplaçant les expressions (E.2), (E.3) et (E.4) dans l'équation (E.1), nous trouvons :

$$\begin{aligned} Q\left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) &= \sum_{\underline{S}} p\left(\underline{x}, \underline{S}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) \left[\log P(\underline{S}) + \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{N-1} (-\log(\pi \Gamma_m^l) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|\underline{G}_m^l|^2}{\Gamma_m^l}) - N \log(\pi \sigma^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left|x_k - \left(\sum_{l=0}^{L-1} H_k^l S_{k-l}\right)\right|^2\right) \right] \\ &= C - p\left(\underline{x}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|\underline{G}_m^l|^2}{\Gamma_m^l} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\underline{S}_{k-L+1}^k} p\left(\underline{x}, \underline{S}_{k-L+1}^k, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}\right) \\ &\quad \left|x_k - \left(\sum_{l=0}^{L-1} H_k^l S_{k-l}\right)\right|^2, \end{aligned}$$

où C est indépendante de $\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$, $\underline{S}_{k-L+1}^k = (S_{k-L+1}, \dots, S_k)^T$ pour $0 \leq k \leq N + L - 2$.

A chaque itération $d + 1$ de l'algorithme EM, nous calculons une nouvelle estimation des coefficients du canal $\underline{G}^{l(d+1)}$, où $l = 0, 1, \dots, L-1$, qui réalise $\max_{\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}} Q \left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right)$.

Chaque itération est composée de L étapes. A la $i^{\text{ème}}$ étape, nous disposons de $\left\{ \underline{G}^{0(d+1)}, \dots, \underline{G}^{i-1(d+1)}, \underline{G}^{i(d)}, \dots, \underline{G}^{L-1(d)} \right\}$ et nous déterminons $\underline{G}^{i(d+1)} = \arg \max_{\underline{G}^i} Q \left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right)$, où $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d+1)}$, $l < i$, $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d)}$, $l \geq i$, $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d+1)}$, $l < i$ et $\underline{G}^l = \underline{G}^{l(d)}$, $l > i$.

Dans la suite, nous allons considérer la représentation polaire de G_m^i , où $m = 0, \dots, N-1$, dans le but de calculer la dérivée de la fonction auxiliaire par rapport à G_m^i :

$$G_m^i = \rho_m^i \exp(j\theta_m^i),$$

où ρ_m^i et θ_m^i sont respectivement l'amplitude et la phase de G_m^i et $j = \sqrt{-1}$.

Pour $l = 0, \dots, L-1$ et $m = 0, \dots, N-1$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q \left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right)}{\partial \rho_m^i} &= -\frac{2}{\sigma^2} p \left(\underline{x}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right) \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\Gamma_m^i} \right) \rho_m^i - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\underline{S}_{k-L+1}^k} \right. \\ &P \left(\underline{S}_{k-L+1}^k | \underline{x}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right) \left(\text{Re} \left(x_k \exp(-j\theta_m^i) B_{mk}^{i*} S_{k-i}^* \right) \right. \\ &\left. \left. - \text{Re} \left(\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{L-1} H_k^l S_{k-l} \right) \exp(-j\theta_m^i) B_{mk}^{i*} S_{k-i}^* \right) \right) \right]. \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q \left(\{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right)}{\partial \theta_m^i} &= -\frac{2\rho_m^i}{\sigma^2} p \left(\underline{x}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\underline{S}_{k-L+1}^k} P \left(\underline{S}_{k-L+1}^k | \underline{x}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right) \\ &\left[\text{Re} \left(j x_k \exp(-j\theta_m^i) B_{mk}^{i*} S_{k-i}^* \right) \right. \\ &\left. - \text{Re} \left(j \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{L-1} H_k^l S_{k-l} \right) \exp(-j\theta_m^i) B_{mk}^{i*} S_{k-i}^* \right) \right]. \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

B_{mk}^i est le $k^{\text{ème}}$ élément de \underline{B}_m^i , le $m^{\text{ème}}$ vecteur propre normalisé de la matrice de

covariance $\underline{\underline{F}}^i$.

Pour obtenir les expressions des équations (E.5) et (E.6), nous avons utilisé le fait que les symboles normalisés sont constants (égaux à ± 1) et que les vecteurs $\{\underline{B}_k^l\}_{k=0}^{N-1}$, $l = 0, \dots, L-1$ sont normalisés. Puisque ces deux équations sont nulles, nous obtenons :

$$G_m^{i(d+1)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\Gamma_m^i}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\underline{S}_{k-L+1}^k} P \left(\underline{S}_{k-L+1}^k | \underline{x}, \{\underline{G}^l\}_{l=0}^{L-1} \right) \left[x_k - \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{L-1} H_k^l S_{k-l} \right) \right] B_{mk}^{i*} S_{k-i}^*.$$

Enfin, nous trouvons que l'expression de, $G_m^{i(d+1)}$, le $m^{\text{ème}}$ élément du $i^{\text{ème}}$ trajet réestimé, à la $(d+1)^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme EM, est donnée par :

$$G_m^{i(d+1)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\Gamma_m^i}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\underline{S}_{k-L+1}^k} P \left(\underline{S}_{k-L+1}^k | \underline{x}, \left\{ \underline{G}^{0(d+1)}, \dots, \underline{G}^{i-1(d+1)}, \underline{G}^{i(d)}, \dots, \underline{G}^{L-1(d)} \right\} \right) x_k^i B_{mk}^{i*} S_{k-i}^*$$

où $x_k^i = x_k - \left(\sum_{l=0}^{i-1} H_k^{l(d+1)} S_{k-l} + \sum_{l=i+1}^{L-1} H_k^{l(d)} S_{k-l} \right)$.

Bibliographie

- [1] L.R.Bahl, J.Cocke, F.Jelinek, and J.Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimising symbol error rate,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. IT-32, pp. 284-287, March 1974.
- [2] M.Bellanger, *Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif*, Masson, Paris, 1989.
- [3] S.Benedetto and E.Biglieri, “Principles of digital transmission with wireless applications,” *kluwer/Plenum*, New York 1999.
- [4] C.Berrou, A.Glavieux and P.Thitimajshima, “Near Shannon limit error-correcting and decoding : Turbo-codes,” *ICC'93*, Geneva, May 1993.
- [5] E.Biglieri, J.Proakis and S.Shamai, “Fading channels : information-theoretic and communications aspects,” *IEEE trans. on Inform. Theory*, vol. 44, no 6, pp. 2619-2691, Oct. 1998.
- [6] S.Châabouni, N.Sellami and M.Siala “Performance analysis of the MAP turbo-equalizer and mapping optimization for BICM,” *ICECS'10*, Grèce, Dec. 2010.
- [7] S.Crozier, D.Falconer, and S.Mahmoud, “Least sum of squared errors (LSSE) channel estimation,” *IEE Proceedings*, vol. 138, pp. 371-378, August 1991.
- [8] L.M.Davis, I.B.Collings and R.J.Evans “Extended least squares identification of doubly spread mobile communication channels,” *ICT'97*, vol. 1, pp. 1023-1027, Melbourne, Victoria, Australia, April 1997.
- [9] A.Dejonghe and L.Vandendorpe, “Bit-interleaved turbo equalization over static frequency-selective channels : Constellation mapping impact,” *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 52, No 12, pp.2061–2065, Dec. 2004.
- [10] A.P.Dempster, N.M.Laird and D.B.Rubin “Maximum likelihood from incomplete data via the E.M. algorithm,” *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser.39, 1977.
- [11] P.Dent, G.E.Bottomley and T.Croft, “Jakes fading model revisited,” *Electronic letters*, vol. 29, No. 13, pp. 1162–1163, June 1993.

- [12] D.Divsalar, S.Dolinar and F.Pollara, "Iterative turbo decoder analysis based on density evolution," *IEEE J. Sel. Areas Comm.*, vol. 19, no. 5, pp. 891-907, May 2001.
- [13] C.Douillard, M.Jezequel, C.Berrou, A.Picart, P.Didier and A.Glavieux, "Iterative correction of intersymbol interference : Turbo-equalization," *European Trans. on Telecom.*, vol. 6, pp. 507-511, 1995.
- [14] H.El Gamal and A.R.Hammons, "Analyzing the turbo decoder using the Gaussian approximation, " *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol.47, no.2, pp. 671-686, Feb.2001.
- [15] G.D.Forney, "The Viterbi algorithm," *IEEE Proceeding*, vol. 68, pp. 268-278, March 1973.
- [16] G.D.Forney, J.R., "Maximum-likelihood sequence estimation for digital sequences in the presence of intersymbol interference," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 18, pp. 363-378, May 1972.
- [17] M.Fu, "Stochastic analysis of turbo decoding," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 81-100, Jan. 2005.
- [18] S.Gabler and C.Wolff, "A quick and easy approximation to the distribution of a sum of weighted chi-square variables," *Statistics Hefte*, vol. 28, pp. 317-325, 1987.
- [19] A.Glavieux, C.Laot and J.Labat, "Turbo-equalization over a frequency selective channel, " *Int. Symp. on Turbo-codes*, Brest, France, pp. 96-102, 1997.
- [20] A.Gorokhov, "On the performance of the Viterbi equalizer in the presence of channel estimation errors," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 5, no. 12, pp. 321-324, Dec. 1998.
- [21] J.Hagenauer, E.Offer and L.Papke, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Vol. 42, No. 2, pp. 429-445, March 1996.
- [22] J.Hokfelt, O.Edfors and T.Maseng, "Interleaver design for turbo codes based on the performance of iterative decoding," *ICC'99*, Vancouver, BC, Canada, June 1999.
- [23] E.Jaffrot and M.Siala, "Turbo channel estimation for OFDM systems on highly time and frequency selective channels," *ICASSP 2000*, Istanbul, Turkey, June2000.
- [24] W.C.Jakes, "Microwave mobile communications," New York : Wiley, 1974.
- [25] R.Kennedy, B.Anderson and R.Bitmead, "Channels leading to rapid error recovery for DFE's," *IEEE Trans. on Commun.*, Vol. 37, No. 11, pp. 1126-1135, Nov. 1989.

- [26] R.Koetter, A.Singer and M.Tüchler, "Turbo equalization : an iterative equalization and decoding technique for coded data transmission," *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 67-79, Jan. 2004.
- [27] S.Lasaulce, N.Sellami, Y.Yuan and A.Saadani "Performance study of least-squares channel estimation based on hard decisions, " *VTC-spring 2003*, Jeju, Korea, April 2003.
- [28] S.Lee, A.Singer and N.R.Shanbhag, "Linear turbo equalization analysis via BER transfer and EXIT charts," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 53, no. 8, pp. 2883-2897, August 2005.
- [29] X.Li, A.Chindapol and J.A.Ritcey, "Bit-interleaved coded modulation with iterative decoding and 8PSK signaling," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 50, pp. 1250-1257, Aug. 2002.
- [30] X.Li and J.A.Ritcey, "Bit-interleaved coded modulation with iterative decoding," *IEEE Commun. Letters*, vol. 1, pp. 169-171, Nov. 1997.
- [31] X.Li and J.A.Ritcey, "Trellis-coded modulation with bit interleaving and iterative decoding," *IEEE J. Select. Areas in Commun.*, vol. 17, pp. 715-724, Apr. 1999.
- [32] Y.(G.)Li and G. Stuber, *Orthogonal Frequency Division Multiplexing for Wireless Communications*, Birkhauser, 2006.
- [33] P.Magniez, "Egalisation et décodage conjoints,"Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, March 2001.
- [34] A.Milewsky, "Periodic sequences with optimal properties for channel estimation and fast start-up equalization," *IBM Journal of Research and Development*, vol.27, no.5, Sept. 1983.
- [35] M.J.M.Peacock and I.B.Collings, "Mutual Information Analysis of Turbo Equalizers for Fixed and Fading Channels," Proc. *ICC'03*, pp. 2938-2942, Anchorage, USA, May 2003.
- [36] A.Picart, P.Didier and A.Glavieux, "Turbo-Detection : A new approach to combat channel frequency selectivity, " *ICC'97*, pp. 1498-1502, June 1997.
- [37] J.G.Proakis, *Digital Communications*, McGraw Hill, New York, 1989.
- [38] R.Pyndiah, A.Glavieux, A.Picart and S.Jacq "Near optimum decoding of product codes," *Globecom'94*, San Francisco, pp. 339-343, Nov. Dec. 1994.
- [39] V.Ramon, C.Herzet and L.Vandendorpe, "A semi-analytical method for predicting the performance and convergence behavior of a multi-user turbo-

- equalizer/demapper," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 55, no. 3, pp. 1104-1117, March 2007.
- [40] A.Roumy, "Egalisation et décodage conjoints : méthode turbo," Thèse de l'université de Cergy-Pontoise, Ecole doctorale sciences et ingénierie, Octobre 2000.
- [41] F.Schreckenbach, N.Gortz, J.Hagenauer and G.Bauch, "Optimization of symbol mappings for bit-interleaved coded modulation with iterative decoding," *IEEE Commun. letters*, vol. 7, No 12, pp.593-595, Dec. 2003.
- [42] N.Sellami, S.Lasaulce and I.Fijalkow, "Turbo channel estimation for coded DS-CDMA systems over frequency selective channels," *SPAWC'03*, pp. 80-84, June 2003.
- [43] N.Sellami, A.Roumy and I.Fijalkow, "A proof of convergence of the MAP turbo-detector to the AWGN case," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 56, no. 4, pp. 1548-1561, Apr. 2008.
- [44] N.Sellami, A.Roumy and I.Fijalkow, "On the analyses of the MAP equalizer performance within an iterative receiver," *SPAWC'04*, Portugal, July 2004.
- [45] N.Sellami, A.Roumy and I.Fijalkow, "Performance analysis of the MAP equalizer with *a priori* and distribution of the extrinsic LLRs," *SPAWC'05*, U.S.A., June 2005.
- [46] N.Sellami, A.Roumy and I.Fijalkow, "The impact of both *a priori* information and channel estimation errors on the MAP equalizer," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 54, No 7, pp 2716-2724, July 2006.
- [47] M.K.Simon and M.S.Alouini, "Digital Communication over Fading Channels : A Unified Approach to Performance Analysis," A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. 2000.
- [48] W.Stallings, *Réseaux et communication sans fil*, Pearson Education, Paris- France, June 2005.
- [49] G.Taricco, G.Caire and E.Biglieri, "Bit interleaved coded modulation," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, pp. 927-946, May 1998.
- [50] S.Ten Brink, "Convergence of iterative decoding," *IEEE Electronic Letters*, vol. 35, pp.806-808, May 1999.
- [51] M.Tüchler, R.Koetter and A.Singer, "Turbo equalization : principles and new results," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 50, no. 5, pp. 754-767, May 2002.
- [52] A.J.Viterbi, "An intuitive justification and a simplified implementation of the MAP decoder for convolutional codes," *JSAC'98*, Vol. 16, No. 2, pp. 260-264, Feb. 1998.

- [53] K.Zeger and A.Gersho, "Pseudo-gray coding," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 38, pp. 2147-2158, Dec. 1990.
- [54] E.Zehavi, "8-PSK treillis codes for a Rayleigh channel," *IEEE Trans. on Commun.*, vol.40, pp. 873-884, May 1992.

Optimisation du mapping et estimation du canal en présence d'un TD

Dans cette thèse, nous considérons les modulations codées à entrelacement aléatoire de bits (BICM : Bit Interleaved Coded Modulation) sur un canal sélectif en fréquence. Nous considérons au niveau du récepteur un turbo-détecteur (TD) formé par un égaliseur Maximum A Posteriori (MAP) et un décodeur MAP. Le choix du mapping de la modulation est crucial pour profiter au maximum de l'effet turbo. Nous proposons dans cette thèse de l'optimiser. Pour ce faire, nous calculons une approximation analytique de la probabilité d'erreur binaire à la sortie du détecteur et nous trouvons le mapping qui la minimise. Cette étude est faite dans le cas de canaux fixes et de Rayleigh par blocs, parfaitement connus au niveau du récepteur ou estimés. Nous nous intéressons aussi au problème de l'estimation des canaux sélectifs en temps et en fréquence. Nous proposons de les estimer itérativement selon le critère MAP en utilisant l'algorithme Expectation-Maximization (EM). Pour simplifier l'étude, nous représentons convenablement le canal discret sur chaque bloc en utilisant le théorème d'expansion orthogonale de Karhunen-Loève (KL). Etant donné que l'algorithme obtenu est assez complexe, nous proposons de le simplifier en négligeant le terme d'interférences entre symboles. Afin de diminuer la perte due à cette approximation, nous proposons d'utiliser un précodage à l'émission pour minimiser l'erreur quadratique moyenne du terme négligé.

Mapping optimization and channel estimation on a presence of a TD

In this thesis, we consider the Bit Interleaved Coded Modulation (BICM) over a frequency selective channel. At the receiver, a turbo-detector (TD) composed of a Maximum *A posteriori* (MAP) equalizer and a MAP decoder is used. Since the modulation mapping choice is crucial to improve the turbo-detector performance, we propose to optimize it. Thus, we calculate an analytical approximation of the Binary Error Probability at the output of the detector and we give the mapping minimizing this approximation. We consider the case of fixed and Rayleigh fading channels, perfectly known at the receiver or estimated. We also study the estimation of time and frequency selective channels. We give the expression of the MAP iterative burst-by-burst channel estimation algorithm using the Expectation-Maximisation (EM) algorithm. In order to make the study easier, we give a suitable representation of the discrete channel using the orthogonal expansion of Karhunen-Loève (KL) theorem. Since the obtained algorithm is complex, we propose to simplify it by neglecting the inter-symbol interference (ISI) term. In order to reduce the error caused by this simplification, we propose to use a precoder at the transmitter leading to the minimum mean square value of the ISI neglected term.